SCM200

Lager- og produksjonsplanlegging

Løsningsforslag til eksamensoppgaver 2015 - 2017

Bård-Inge Pettersen
Per Kristian Rekdal

Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

Forord

Løsningsforslag:

Dette er en samling av løsningsforslag til gamle eksamensoppgaver i emnet "*SCM200 Lager- og produksjonsplanlegging*" ved Høgskolen i Molde.

Det finnes også en tilhørende samling med selve eksamensoppgavene til disse løsningforslagene. Samlingen med eksamensoppgaver finnes i et eget hefte, separert fra dette løsningsheftet.

Gratis:

Både samlingen med oppgaver og tilhørende samling med komplette løsningsforslag kan lastes ned gratis via Høgskolen i Molde sin åpne kursportal www.himoldeX.no.

Hvordan bruke denne samlingen av tidligere eksamensoppgaver med løsningsforslag?:

Det anbefales å regne gjennom gamle eksamensoppgaver før eksamen. Dersom man gjør det så får man en god pekepinn på hva som kreves på eksamensdagen. Sett av 5 timer, prøv så godt du kan uten løsningsforslag. Etter at de 5 timene er over, rett din egen eksamensbesvarelse. Og sett gjerne karakter på deg selv.

Ikke bare i eksamensperioden, men også ellers i semesteret kan det være lurt å regne gjennom gamle eksamensoppgaver. Men gå gjennom teorien før man gjør oppgaver. Da får man bedre utbytte av oppgaveløsningen.

Videoer:

Komplette sett med forelesningsvideoer i SCM200 finner du her.

Bård-Inge Pettersen

Innhold

Testeksamen 2015

LØSNING: Testeksamen mai 2015

"SCM200 Lager -og Produksjonsstyring", vår 2015

Oppgave 2: (*"MPS og MRP og sekvensiering"*)

a)

i) Vi setter opp masterplantabellen for Tripp-Trapp stolen:

Uke	**init**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prognose		300	380	340	230	420	250	320	280	340	300
Ordrer		350	180	400	350	340	300	250	40	140	450
Lagernivå	800	450	270	670	320	700	400	80	600	260	760
Ledig-til-reservasjon		270		50		-90			620		350
MPS				800		800			800		800

ii Det er raden som kalles "Ledig-Til-Reservasjon", som forteller Stokke hva de kan love forhanlderne.

Definisjonen av Ledig-Til-Reservasjon: Ledig-Til-Reservasjon er definert som differansen mellom bestilt produksjonsordre (MPS) og antall solgte ordrer (Ordrer) totalt frem til neste bestilte produksjonsordre.

iii Problemet med planen er at Ledig-Til-Reservasjon er -90 i uke 5. De har dermed lovet 90 Tripp-TRapp stoler mer enn de klarer å levere.

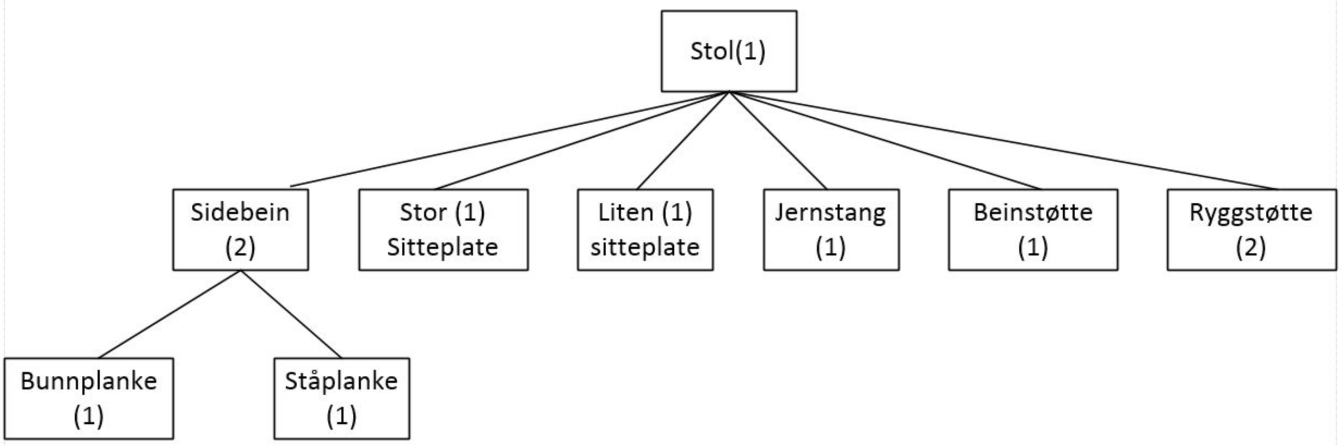
En slik situasjon kan oppstå dersom selgerne legger inn ordrer uten å ta hensyn til Ledig-Til-Reservasjon. Selgere lover ofte kundene noe som de ikke klarer å levere.

Det er mange måter å løse et slikt problem på :

- De kan øke MPS til 890 i uke 5, dette er nok den vanligste metoden. Dette vil som regel medføre eventuelt overtidsarbeid og ekstra kostnader.
- De kan ringe til kundene og be om andre leveringsdatoer, f.eks. flytte noen av ordrene til uke 8.

b) Vi skal gjennomføre MRP-beregninger for TRipp-Trapp-stolen de neste 10 ukene.

i) BOM-strukturen er gitt ved:



Figur 1: BOM-strukturen for Tripp-TRapp stolen

ii) Vi har allerede lagd en MPS-plan for selve Tripp-TRapp stolen i oppgave a) (Masterplanen). Det eneste vi må huske er at MPS-planen gir kun når stolene skal være ferdige, dvs. MPS-planen tar tar ikke høyde for produksjonstiden, som er 2 uker for en serie på 800 Tripp-Trapp stoler.

Det første vi avgjør er hvor mange MRP-tabeller vi skal føre. Siden jernstang, bunnplanke og beinstøtte er C-artikler, føres det ikke MRP-tabeller for disse. I tillegg er det nok med en felles MRP-tabell for stor og liten sitteplate. Vi skal altså lage 4 MRP-tabeller i denne oppgaven:

- Ryggstøtte
- Sidebein
- Felels plan for stor og liten sitteplate
- ståplanke

Ryggstøtte

Siden vi har en MPS-bestilling i uke 3,5,8 og 10 (masterplanen), så blir nettobehovet for ryggstøtte 1600 i uke 1,3,6 og 8.

Uke	**Init**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Bruttobehov		1600		1600			1600		1600		
Planlagt mottak		850									
Lager	800	50									
Nettobehov				1550			1600		1600		
Planlagt ordre		1550			1600		1600				

Sidebein

Siden vi har en MPS-bestilling i uke 3,5,8 og 10 (masterplanen), så blir nettobehovet for sidebein 1600 i uke 1,3,6 og 8.

Uke	**Init**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Bruttobehov		1600		1600			1600		1600		
Planlagt mottak											
Sikkerhetslager	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
Lager	3800	2200	2200	600	600	600	3000	3000	1400	1400	1400
Nettobehov							1000				
Planlagt ordre				4000							

Stor og liten sitteplate

Siden vi har en MPS-bestilling i uke 3,5,8 og 10 (masterplanen), så blir nettobehovet for store og små sitteplater 800 i uke 1,3,6 og 8.

Uke	**Init**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Bruttobehov		800		800			800		800		
Planlagt mottak		1200									
Sikkerhetslager	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
Lager	100	500	500	700	700	700	900	900	100	100	100
Nettobehov				300			100				
Planlagt ordre			1000			1000					

Ståplanke

Siden vi har en ordre på 4000 i uke 3 fra sidebeinplanen, i tillegg til planlagte ordrer på 2000 i uke 3 og uke 6 for den andre varianten, får vi bruttobehov på 6000 i uke 3 og 2000 i uke 6.

I tillegg har vi svinn på lageret på 10% hver uke på grunn av reservedeler. Husk at det er 10% på det *totale* lageret, dvs. inkludert sikkerhetslageret. For å vise utregningene for svinnet, har vi lagt til to ekstra rader: "Lager før svinn" og "Svinn". Raden "Lager etter svinn", er det faktiske lageret vi er ute etter.

Uke	**Init**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Bruttobehov				6000			2000				
Planlagt mottak											
Sikkerhetslager	600	600	600	600	600	600	600	600	600	600	600
Lager før svinn	3400	3400	3000	4640	4115	3644	1220	1038	874	727	594
Svinn		400	360	524	472	424	182	164	147	133	119
Lager etter svinn		3000	2640	4116	3644	3220	1038	874	727	594	475
Nettobehov				3360							
Planlagt ordre		8000									

c) Vi skal se på sekvensieringen av to produkter som går gjennom de samme to stasjonene hos Stokke. Vi har en ordre på 60 Tripp-Trapp stoler og en ordre på 30 vippestoler.

i) For enkelhetsskyld kaller vi ordren for Tripp-Trapp stolene ordre A, mens ordren for vippestolene kaller vi for ordre B.
Vi må først beregne *bearbeidingstidene* for hver ordre for hver av stasjonene:

<u>Ordre A:</u>

- Stasjon 1: bearbeidingstiden er 60*3 minutter = 180 minutter, dvs. 3 timer
- Stasjon 2: bearbeidingstiden er 60*5 minutter = 300 minutter, dvs. 5 timer

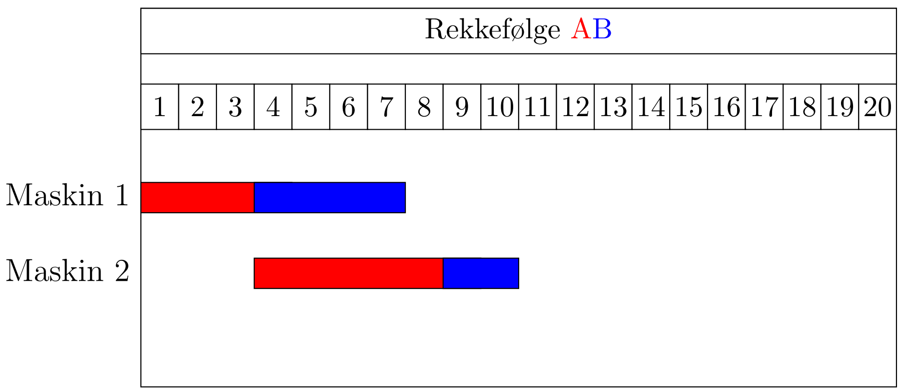
<u>Ordre B:</u>

- Stasjon 1: bearbeidingstiden er 30*8 minutter = 240 minutter, dvs. 4 timer
- Stasjon 2: bearbeidingstiden er 30*4 minutter = 120 minutter, dvs. 2 timer

Siden vi har to ordrer og to stasjoner får vi $2^2 = 4$ muligheter, men i prinsippet er kun *to* av dem aktuelle, siden hvis A prosesseres først på stasjon1, så må også A prosesseres først på stasjon 2. Å splitte ordrerekkeføgen på stasjonene er åpenbart ineffektiv, så vi ser vekk ifra disse. Vi har dermed *to* muligheter: AB eller BA.

<u>Ganttdiagram for situasjonen AB, dvs. A først:</u>

Merk: Rød er ordre A mens blå er ordre B:



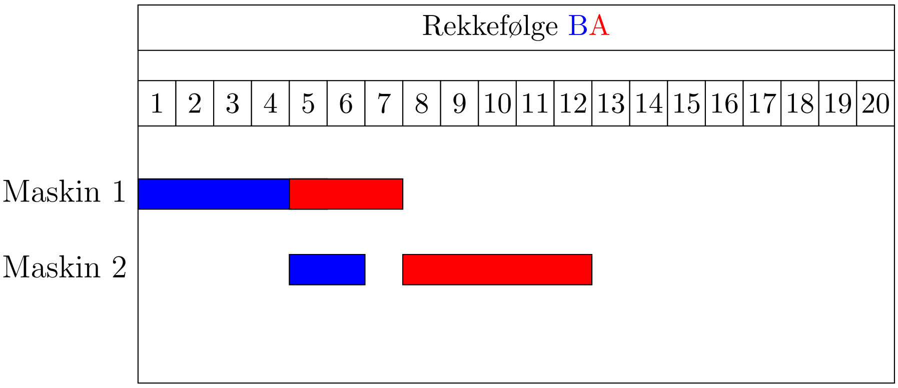
Makespan = sluttid B = 10 timer

Total gjennomløpstid = sluttid A + sluttid B = 8+10=18 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid =Total gjennomløpstid/2 = 18/2=9 timer

Ganttdiagram for situasjonen BA, dvs. B først:

Merk: Rød er ordre A mens blå er ordre B:



Makespan = sluttid A = 12 timer

Total gjennomløpstid = sluttid A + sluttid B = 6+12=18 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid =Total gjennomløpstid/2 = 18/2=9 timer

Konklusjon:
Vi ser at hvis vi ønsker å minimere makespan, så er det optimalt med rekkefølgen AB, mens hvis vi bruker total gjennomløpstid, så er både AB OG BA optimale.

ii) Vi har fått inn en ny ordre, kall den C, på 120 barnebilseter, som også bearbeides gjennom de samme to stasjonene. Igjen må vi regne ut de totale bearbeidingstidene for de to stajonene:

Ordre C:

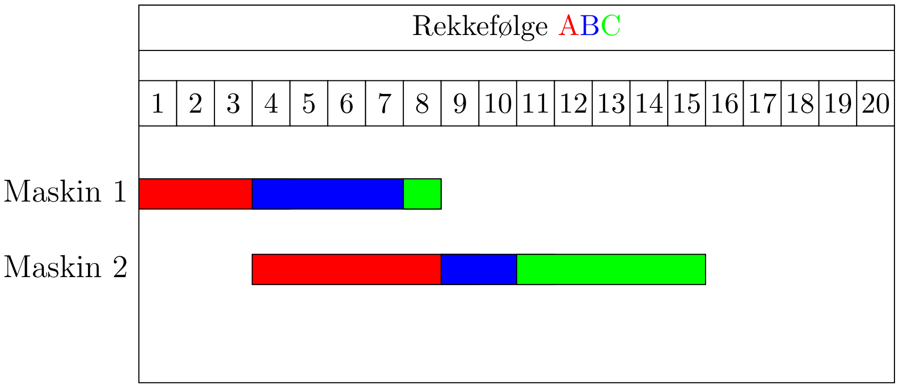
- Stasjon 1: bearbeidingstiden er 120*0.5 minutter = 60 minutter, dvs. 1 time
- Stasjon 2: bearbeidingstiden er 120*2.5 minutter = 300 minutter, dvs. 5 timer

Med den ny ordren C øker problemets kompleksitet. Vi har 6 mulige optimale planer:

$$
\begin{aligned}
ABC &= \text{Først A, så B så C}\\
ACB &= \text{Først A, så C så B}\\
BAC &= \text{Først B, så A så C}\\
BCA &= \text{Først B, så C så A}\\
CAB &= \text{Først C, så A så B}\\
CBA &= \text{Først C, så B så A}
\end{aligned}
$$

Vi må dermed lage 6 Ganttdiagrammer for å bestemme hvilke av dem som er optimale.

ABC:

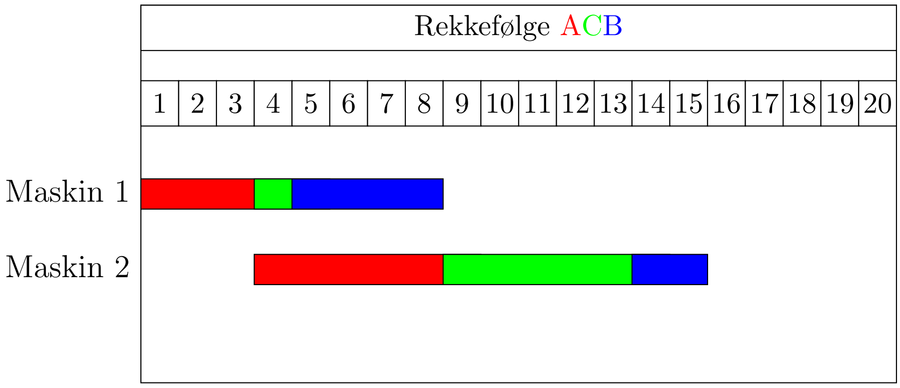


Makespan = sluttid C = 15 timer

Total gjennomløpstid = sluttid A + sluttid B +sluttid C= 8+10+15=33 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid =Total gjennomløpstid/3 = 33/3=11 timer

ACB:

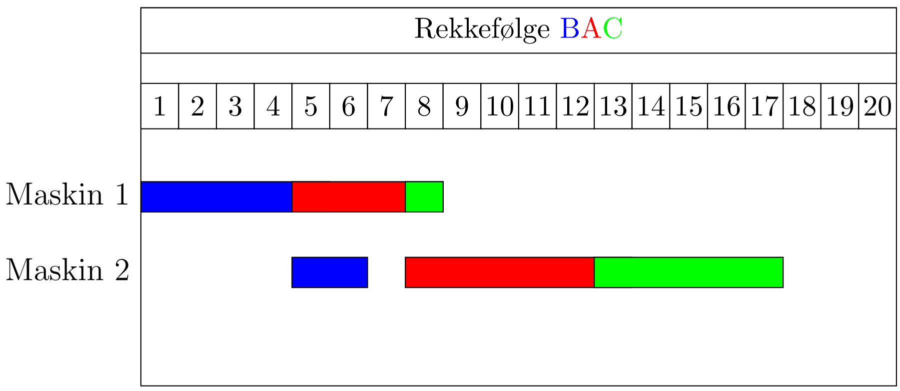


Makespan = sluttid C = 15 timer

Total gjennomløpstid = sluttid A + sluttid C +sluttid B= 8+13+15=36 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid =Total gjennomløpstid/3 = 36/3=12 timer

BAC:

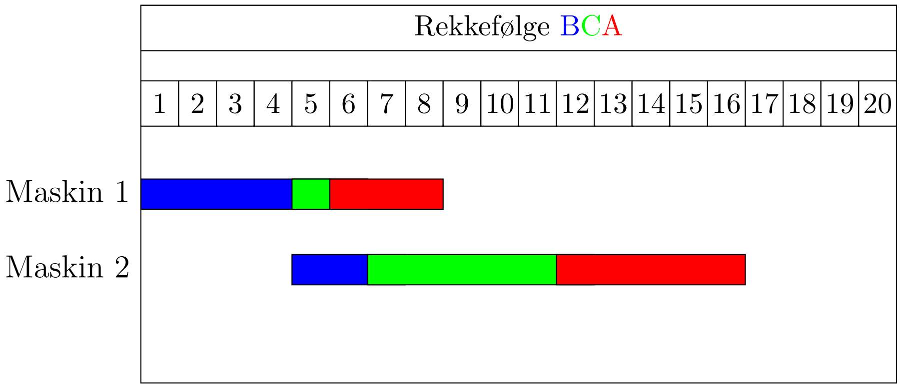


Makespan = sluttid C = 17 timer

Total gjennomløpstid = sluttid B + sluttid A +sluttid C= 6+12+17=35 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid =Total gjennomløpstid/3 = 35/3=11.666 timer

BCA:

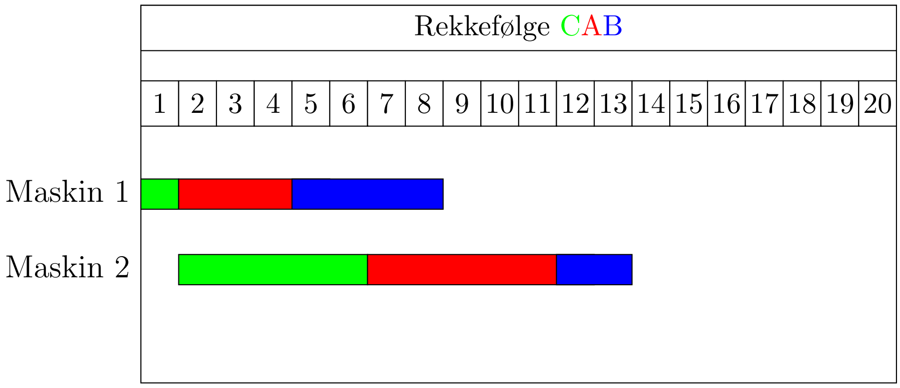


Makespan = sluttid C = 16 timer

Total gjennomløpstid = sluttid B + sluttid C +sluttid A= 6+11+16=33 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid =Total gjennomløpstid/3 = 33/3=11 timer

CAB:

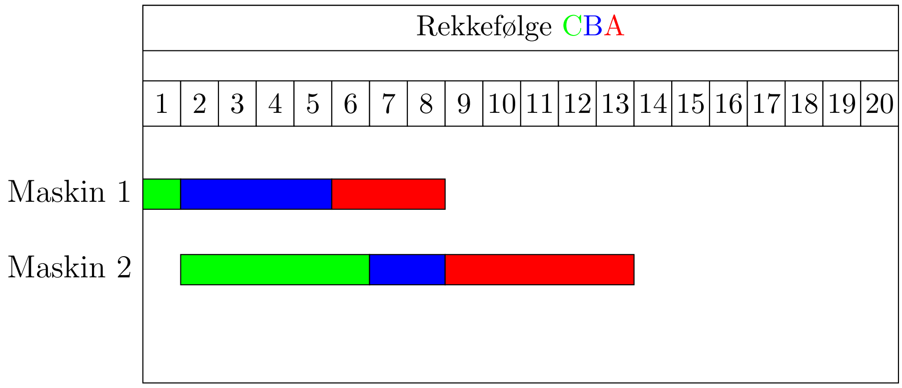


Makespan = sluttid B = 13 timer

Total gjennomløpstid = sluttid C + sluttid A +sluttid B= 6+11+13=30 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid =Total gjennomløpstid/3 = 27/3=10 timer

CBA:



Makespan = sluttid A = 13 timer

Total gjennomløpstid = sluttid C + sluttid B +sluttid A= 6+8+13=27 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid =Total gjennomløpstid/3 = 27/3=9 timer

Konklusjon:
Minimalt makespan: 13 timer ved rekkefølgene CAB og CBA

Minimal gjennomsnittlig gjennomløpstid: 9 timer ved rekkefølgen CBA

Hovedeksamen 2015

LØSNING: Hovedeksamen 22. mai 2015

"*SCM200 Lager -og Produksjonsstyring*", vår 2015

Oppgave 1: ("*Prognostisering, EOQ og Wagner Within*")

a) Ved å velge lav glattingsparameter $\theta = 0.8$, ønsker kontoret å glatte"ut variasjonen i observasjonene. Det vil si at de antar den virkelige etterspørselen kan ha store svingninger som figuren viser.

Å ha lav glattingsparameter, innebærer at vi vektlegger de *historiske* observasjonene mer enn den siste observasjonen (trekt 50% dersom dette poenget ble utelatt).

b) Vi husker den skrittvise *rekurrenslikningen* for å beregne nivåene:

$$\hat{x}_1 = x_1$$
$$\hat{x}_t = \theta \hat{x}_{t-1} + (1-\theta) x_t, \qquad t = 2, 3, \ldots, N$$

I vårt tilfelle har vi $N = 8$ observasjoner:

$$\hat{x}_1 = x_1 = 3000$$

$$\hat{x}_2 = \theta \hat{x}_1 + (1-\theta) x_2 = 0.8 \cdot 3000 + 0.2 \cdot 3500 = 3100$$

$$\hat{x}_3 = \theta \hat{x}_2 + (1-\theta) x_3 = 0.8 \cdot 3100 + 0.2 \cdot 2800 = 3040$$

$$\hat{x}_4 = \theta \hat{x}_3 + (1-\theta) x_4 = 0.8 \cdot 3040 + 0.2 \cdot 3200 = 3072$$

$$\hat{x}_5 = \theta \hat{x}_4 + (1-\theta) x_5 = 0.8 \cdot 3072 + 0.2 \cdot 3700 = 3197.6$$

$$\hat{x}_6 = \theta \hat{x}_5 + (1-\theta) x_6 = 0.8 \cdot 3197.6 + 0.2 \cdot 3600 = 3278.08$$

$$\hat{x}_7 = \theta \hat{x}_6 + (1-\theta) x_7 = 0.8 \cdot 3278.08 + 0.2 \cdot 2900 = 3202.464$$

$$\hat{x}_8 = \theta \hat{x}_7 + (1-\theta) x_8 = 0.8 \cdot 3202.464 + 0.2 \cdot 3300 = 3221.971$$

Siden vi ikke har flere observasjoner, må vi prognostisere nivåene for de neste 8 ukene. Vi setter disse prognosene lik nivået vi regnet ut for siste uke, siden dette er vår ferskeste prognose:

$$\underline{\underline{\hat{x}_9 = \hat{x}_{10} = \hat{x}_{11} = \hat{x}_{12} = \hat{x}_{13} = \hat{x}_{14} = \hat{x}_{15} = \hat{x}_{16} = \hat{x}_8 = 3222}}$$

c) Vi skal regne ut MAD for metoden vi brukte over. Vi har 7 observasjoner vi kan regne ut feilen på :

$$MAD = \frac{1}{7}\sum_{t=2}^{8}|E_t|$$

$$= \frac{1}{7}(|3500 - 3000| + |2800 - 3100| + |3200 - 3040| + |3700 - 3072| + |3600 - 3197.6|$$

$$+ |2900 - 3278.08| + |3300 - 3202.464)|)$$

$$= \frac{1}{7}(500 + 300 + 160 + 628 + 402.4 + 378.08 + 97.536)$$

$$= 352.288$$

MAD er et gjennomsnittlig mål på absolutt feil, og kan således benyttes til å

- sammenlikne metoden mot andre metoder, lav MAD representerer en god prognose
- bestemme sikkerhetslager, siden målet samtidig gir et gjennomsnittlig mål på avviket

NB! Denne oppgaven ga også 100% score dersom man brukte $E_t = X_t - \hat{X}_t$, pga feil i kompendiet.

d)

i) Ved å benytte EOQ formelen, har kontoret gjort hovedantakelsen om at etterspørselen er *konstant.*

ii) Optimal ordrestørrelse (EOQ) er gitt ved Wilsons formel:

$$X^* = \sqrt{\frac{2DS}{C_H}}$$

hvor

$$\begin{aligned} D = & \quad \text{konstant etterspørselsrate} \\ S = & \quad \text{bestillingskostnaden} \\ C_H = & \quad \text{lagerkostnaden} \end{aligned}$$

Kommentarer:

- Alle data må ha samme tidsenhet (år, måneder, uker etc)
- Lagerkostnaden er ofte oppgitt som en lager*rente*, i såfall trenger vi ofte innkjøpskostnaden.

I denne oppgaven har vi fått oppgitt at tidsenheten er *uker*:

$$\begin{aligned} D &= 3222 \;\; \text{solgte Iphoner per uke} \\ S &= 20000 \;\; \text{bestillingskostnaden} \\ r &= 0.1 \;\; \text{lagerrenten per år} \\ P &= 3000 \;\; \text{innkjøpsprisen per Iphone} \\ C_H &= \frac{rP}{52} = 5.77 \;\; \text{lagerkostnaden pr Iphone per uke} \end{aligned}$$

Vi setter inn i formelen og får:

$$X^* = \sqrt{\frac{2DS}{C_H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3222 \cdot 20000}{5.77}} = 4726$$

iii) Vi skal regne ut *omløpshastigheten* O på lageret, dvs hvor lang tid det tar fra lageret er fullt (EOQ) til lageret er tomt. Siden etterspørselen er konstant, kan vi dele EOQ med etterspørslesraten:

$$O = \frac{X^*}{D} = \frac{4726}{3222} = 1.467$$

Det tar med andre ord 1.467 uker fra lageret er fulllt til lageret er tomt. Vi må dermed legge inn ny bestilling etter 1.467 uker.

iv) Vi skal regne ut merkostnadene pr uke. Denne kostnaden er gitt ved summen av bestillingskostnaden og lagerkostnaden i løpet av en uke:

$$
\begin{aligned}
C &= S\frac{D}{X^*} + C_H\frac{X^*}{2} \\
&= 20000 \cdot \frac{3222}{4726} + 5.77 \cdot \frac{4726}{2} \\
&= 27270
\end{aligned}
$$

v) Dersom Lefdal bruker en ordrestørrelse på 5000 Iphoner, får de en rabatt på 10% på innkjøpsprisen, dvs $P_{ny} = P \cdot 0.9 = 3000 \cdot 0.9 = 2700$ kroner pr Iphone.

Dermed får Lefdal en ny lagerkostnad:

$$
\begin{aligned}
C_{ny} &= \frac{iP_{ny}}{52} \\
&= \frac{0.1 \cdot 2700}{52} \\
&= 5.19
\end{aligned}
$$

Totale ukentlige kostnader ved ordrestørrelse på $X_R = 5000$ er dermed gitt ved:

$$C = S\frac{D}{X_R} + C_{ny}\frac{X_R}{2} = 20000 \cdot \frac{3222}{5000} + 5.19 \cdot \frac{5000}{2} = 25863$$

Siden EOQ gir ukentlig kostnad $27313 \geq 25863$, burde Lefdal bruke 5000 som ordrestørrelse.

e)

NB: Jeg har også godkjent oppgavene 100% dersom det ble brukt $d = 3222$.

i) Sikkerhetslageret ved antakelse om normalfordelt etterspørsel pr uke er gitt ved

$$SS = Z\sqrt{L}\sigma$$

hvor

- Z er sikkerhetsfaktoren som vi får fra omvendt tabelloppslag for normalfordelt etterspørsel. Faktoren tilsvarer sannsynlighet for å få stockout på 0.01.
- L er ledetida
- σ er standardavviket for observasjonene

Vi får dermed (husk at vi må konvertere ledetida til antall *uker*):

$$\begin{aligned} SS &= Z\sqrt{L}\sigma \\ &= 2.33 \cdot \sqrt{6/7} \cdot 312 \\ &= 673 \end{aligned}$$

ii) Den ukentlige kostnaden på sikkerhetslageret er gitt ved

$$C_{SS} = C_H SS = 5.77 \cdot 673 = 3883$$

Den årlige kostnaden på sikkerhetslageret er dermed

$$C_{SS}^{\text{år}} = 52 C_{SS} = 52 \cdot 3883 = 201927$$

iii) Bestillingspunktet er gitt ved

$$R = dL + SS$$

hvor

- d er normert etterspørsel, dvs $d = 3250$
- L er ledetida

- SS er sikkerhetslageret

Vi får dermed :

$$\begin{aligned} R &= dL + SS \\ &= 3250 \cdot 6/7 + 673 \\ &= 3459 \end{aligned}$$

f)

NB: Jeg har også godkjent oppgavene 100% dersom det ble brukt $d = 3222$.

Vi regner ut verdiene for X^* og B^*:

$$\begin{aligned} X^* &= \sqrt{\frac{2DS}{C_H}}\sqrt{\frac{C_H + b}{b}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 3250 \cdot 20000}{5.77}} \cdot \sqrt{\frac{5.77 + 150}{150}} \\ &= 4837 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^* &= \sqrt{\frac{2DS}{b}}\sqrt{\frac{C_H + b}{C_H}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 3250 \cdot 20000}{5.77}} \cdot \sqrt{\frac{5.77 + 150}{150}} \\ &= 4837 \end{aligned}$$

Siden Lefdal tar imot 4837 Iphoner ved bestilling, kan bestillingspunktet redusereres med tilsvarende antall Iphoner. Vi husker fra oppgave e), at bestillingspunktet var på 3459 Iphoner. Det nye bestillingspunktet er dermed gitt ved:

$$R_{ny} = R_{gammel} - B^*$$

$$= 3459 - 4837$$

$$= -1378$$

Dette betyr at det nye bestillingspunktet er når Lefdal har igjen 1378 bestillinger av totalt 4837 mulige bestillinger.

g)

Siden vi har 8 uker i denne modellen, bruker vi indeksnotasjon. Vi har følgende indeks i denne oppgaven:

- $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, hvor t representerer en vilkårlig uke

i) Data:

$I_0 = 0$	Inngående lagerbeholdning av ordinære ordrer
$I_8 = 0$	Utgående lagerbeholdning av ordinære ordrer
$C_H = 2$	Lagerkostnad pr enhet fra en uke til neste
$S = 20000$	bestillingskostnaden per uke
D_t	etterspørselen i uke t hvor $t = 1, \dots, 8$

ii) Variabler:

Vi har tre typer variabler:

Lagervariabler:

I_t overlagring fra uke t til uke $t + 1$ hvor $t = 1, \dots, 7$

Kvantumsvariabler:

$$X_t \qquad \text{antall IPhoner bestilt tiluke } t \text{ hvor } t = 1, \ldots, 8$$

Bestille/ikke bestille variabler:

$$Y_t = \begin{cases} 1 & , \quad \text{dersom legger inn bestilling til uke } t \\ 0 & , \quad \text{hvis ikke} \end{cases}$$

for alle $t = 1, \ldots, 8$.

iii) Målfunksjon:

Målfunksjonene er gitt ved bestillingskostnader pluss lagerkostnader summert over hele horisonten

$$C = \sum_{t=1}^{8} SY_t + \sum_{t=1}^{7} C_H I_t$$

iv) Føringer:

Vi har to typer føringer i denne modellen: lagerbalansen og logisk føring mellom bestilling og antall bestilte IPhoner.

Lagerbalansen:

$$I_{t-1} + X_t - D_t = I_t \qquad \text{lagerbalanse for uke } t \text{ hvor } t = 1, \ldots, 8$$

Logisk føring mellom X og Y:

På logisk form:

$$\text{Hvis} Y_t = 0, \text{så må } X_t = 0, \qquad \text{ingen bestilling, ingen kvanta i uke } t \text{ hvor } t = 1, \ldots, 8$$

På matematisk form:

$$(1 - Y_t)X_t, \qquad \text{ingen bestilling, ingen kvanta i uke } t \text{ hvor } t = 1, \ldots, 8$$

h)

i) Siden vi for delproblem 4 har at det er optimalt at siste bestilling skjer i uke 3, kan vi ved hjelp av Horisontteoremet, kutte uke 1 og uke 2.

$\underline{P_5\text{: Delproblem 5}}$

$$C_5^* = \min[(\textit{siste best. i 3. periode}),\ (\textit{siste best. i 4. periode}),\ (\textit{siste best. i 5. periode})]$$

$$= \min[(50800 + 2C_H D_5),\ (55200 + C_H D_5),\ (S + C_4^*)]$$

$$= \min[(50800 + 2 \cdot 2 \cdot 3000),\ (55200 + 2 \cdot 3000),\ (20000 + 50800)]$$

$$= \min[62800,\ \underline{61200},\ 70800]$$

$$= 61200$$

Siden vi for delproblem 5 har at det er optimalt at siste bestilling skjer i uke 4, kan vi ved hjelp av Horisontteoremet, kutte uke 3.

$\underline{P_6\text{: Delproblem 6}}$

$$C_6^* = \min[(\textit{siste best. i 4. periode}),\ (\textit{siste best. i 5. periode}),\ (\textit{siste best. i 6. periode})]$$

$$= \min[(61200 + 2C_H D_6),\ (70800 + C_H D_6),\ (S + C_5^*)]$$

$$= \min[(61200 + 2 \cdot 2 \cdot 5000),\ (70800 + 2 \cdot 5000),\ (20000 + 61200)]$$

$$= \min[81200,\ \underline{80800},\ 81200]$$

$$= 80800$$

Siden vi for delproblem 6 har at det er optimalt at siste bestilling skjer i uke 5, kan vi ved horisontteoremet kutte uke 4.

$\underline{P_7\text{: Delproblem 7}}$

$$C_7^* = \min[\ (sb.\ i\ 5.\ periode),\ (sb.\ i\ 6.\ periode),\ (sb.\ i\ 7.\ periode)]$$

$$= \min[(80800 + 2C_H D_7),\ (81200 + C_H D_7),\ (S + C_6^*)]$$

$$= \min[\ (80800 + 2 \cdot 2 \cdot 4500),\ (81200 + 2 \cdot 4500),\ (20000 + 80800)]$$

$$= \min[\ 98800,\ \underline{90200},\ 100800]$$

$$= 90200$$

Siden vi for delproblem 7 har at det er optimalt at siste bestilling skjer i uke 6, kan vi nå kutte uke uke 5

P_8: Det fulle problemet

$$C_8^* = \min[(sb.\ i\ 6.\ periode),\ (sb.\ i\ 7.\ periode),\ (sb.\ i\ 8.\ periode)]$$

$$= \min[(90200 + 2C_H D_8),\ (100800 + C_H D_8),\ (S + C_7^*)]$$

$$= \min[(90200 + 2 \cdot 2 \cdot 3700),\ (100800 + 2 \cdot 3700),\ (20000 + 90200)]$$

$$= \min[\underline{105000},\ 108200,\ 110200]$$

$$= 105000$$

ii) Vi har dermed funnet den optimale kostnaden på 105 000 kroner. Vi må nå til slutt finne selve bestillingsplanen. Dette gjør vi ved å starte bakerst og gå fremover fra subproblem til subproblem og lese av hvor siste bestilling inntreffer.

- $C_{xxxxx100}$, siden siste bestilling skjer i uke 7. Vi hopper dermed til delproblem 5
- $C_{xxx10100}$, siden siste bestilling skjer i uke 4 for delproblem 5. Vi hopper til delproblem 3
- $C_{10010100}$, siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 3.

Vi har dermed funnet bestillingsplanen (Y-variablene):

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= 1 \\
Y_2 &= 0 \\
Y_3 &= 0 \\
Y_4 &= 1 \\
Y_5 &= 0 \\
Y_6 &= 1 \\
Y_7 &= 0 \\
Y_8 &= 0
\end{aligned}
$$

Vi finner X-variablene ved å bruke teoremet om "Dominante produksjonsplaner" - kun hele etterspørselsbehov.

$$
\begin{aligned}
X_1 &= D_1 + D_2 + D_3 = 3000 + 2000 + 2800 = 7800 \\
X_2 &= 0 \\
X_3 &= 0 \\
X_4 &= D_4 + D_5 = 3400 + 3000 = 6400 \\
X_5 &= 0 \\
X_6 &= D_6 + D_7 + D_8 = 5000 + 4500 + 3700 = 13200 \\
X_7 &= 0 \\
X_8 &= 0
\end{aligned}
$$

Fra X-variablene leser vi enkelt av lagervariablene:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= D_2 + D_3 = 2000 + 2800 = 4800 \\
I_2 &= D_3 = 2800 \\
I_3 &= 0 \\
I_4 &= D_5 = 3000 \\
I_5 &= 0 \\
I_6 &= D_7 + D_8 = 4500 + 3700 = 8200 \\
I_7 &= D_8 = 3700
\end{aligned}
$$

iii)

Denne oppgaven ble lengre enn forventet, så denne oppgaven ble brukt som grunnlag i vippesituasjoner

Hvis vi får en kansellering på 1000 Iphoner i uke 5, så må vi beregne C_5^* på nytt med etterspørsel på 2000 Iphoner istedet ofr 3000 Iphoner.

P_5: Delproblem 5

$$
\begin{aligned}
C_5^* &= \min[(\textit{siste best. i 3. periode}),\ (\textit{siste best. i 4. periode}),\ (\textit{siste best. i 5. periode})] \\
&= \min[(50800 + 2C_H D_5),\ (55200 + C_H D_5),\ (S + C_4^*)] \\
&= \min[(50800 + 2 \cdot 2 \cdot 2000),\ (55200 + 2 \cdot 2000),\ (20000 + 50800)] \\
&= \min[\underline{58800},\ 59200,\ 70800] \\
&= 58800
\end{aligned}
$$

Siden vi nå ikke kan bruke horisontteoremet, må vi også beregne C_6^* på nytt, hvor vi nå inkluderer uke 3:

P_6: Delproblem 6

$$
\begin{aligned}
C_6^* &= \min[(\textit{siste best. i 3. periode}), (\textit{siste best. i 4. periode}),\ (\textit{siste best. i 5. periode}),\ (\textit{siste best. i 6. per} \\
&= \min[(58800 + 2C_H D_6), (59200 + 2C_H D_6),\ (70800 + C_H D_6),\ (S + C_5^*)] \\
&= \min[(58800 + 3 \cdot 2 \cdot 5000), (59200 + 2 \cdot 2 \cdot 5000),\ (70800 + 2 \cdot 5000),\ (20000 + 61200)] \\
&= \min[98800,\ 79200,\ 80800,\ \underline{78800}] \\
&= 78800
\end{aligned}
$$

Horisontteoremet kutter nå både uke 3, 4 og 5. Vi fortsetter til delproblem 7:

$\underline{P_7\text{: Delproblem 7}}$

$$
\begin{aligned}
C_7^* &= \min[(\textit{sb. i 6. periode}),\ (\textit{sb. i 7. periode})] \\
&= \min[(78800 + C_H D_7),\ (S + C_6^*)] \\
&= \min[(78800 + 2 \cdot 4500),\ (20000 + 78800)] \\
&= \min[\underline{87800},\ 98800] \\
&= 87800
\end{aligned}
$$

Horisontteoremet kutter ingen uker her, så vi fortsetter til delproblem 8:

$\underline{P_8\text{: Det fulle problemet}}$

$$
\begin{aligned}
C_8^* &= \min[(\textit{sb. i 6. periode}),\ (\textit{sb. i 7. periode}),\ (\textit{sb. i 8. periode})] \\
&= \min[(87800 + 2C_H D_8),\ (98800 + C_H D_8),\ (S + C_7^*)] \\
&= \min[(87800 + 2 \cdot 2 \cdot 3700),\ (98800 + 2 \cdot 3700),\ (20000 + 87800)] \\
&= \min[\ 102600,\ \underline{106200},\ 107800] \\
&= 102600
\end{aligned}
$$

Vi har dermed funnet den optimale kostnaden på 102 600 kroner. Vi må nå til slutt finne selve bestillingsplanen. Dette gjør vi ved å starte bakerst og gå fremover fra subproblem til subproblem og lese av hvor siste bestilling inntreffer.

- $C_{xxxxx100}$, siden siste bestilling skjer i uke 6. Vi hopper dermed til delproblem 5
- $C_{xx100100}$, siden siste bestilling skjer i uke 3 for delproblem 5. Vi hopper til delproblem 2
- $C_{10100110}$, siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 2.

iv) Den nye føringen fra Apple, sier at vi ikke kan bestille to uker på rad. Siden variablene Y_t, for $t = 1, \ldots, 8$ representerer bestillingene, sier føringen at vi ikke kan ha to påfølgende Y-variabler lik 1:

$$\text{Hvis } Y_t = 1, \text{ så må } Y_{t+1} = 0, \text{ for alle } t = 1, \ldots, 7$$

Denne føringen kan uttrykkes matematisk ved:

$$Y_t + Y_{t+1} \leq 1, \text{ for alle } t = 1, \ldots, 7$$

v) Løsningen fra oppgave h.ii) er gitt ved $C_{10101010}$. Vi ser at løsnignen *ikke* bestiller to uker på rad (to 1ere etter hverandre). Løsningen er derfor fremdeles optimal.

vi) Teoremet om dominante produksjonsplaner er fremdeles oppfylt, siden vi fremdeles kan flytte etterspørsel i perioder med produksjon uten at noen av føringene brytes.

Horisontteoremet er ikke oppfylt siden vi nå må ta høyde for at to bestillinger ikke kan komme etter hverandre. Årsaken kommer av at vi ikke lenger kan splitte et problem i to subproblemer hvor det er optimalt å ha produksjon, noe som igjen kommer av at de to delproblemene er koblet gjennom den nye føringen.

Det er derimot naturlig å forvente at en variant av horisontteoremet er oppfylt, som betinger på hvor det er produksjon.

Oppgave 2: (“*MPS og MRP og sekvensiering*”)

a)

i) Vi setter opp masterplantabellen for ”Stokke Steps Chair” - stolen:

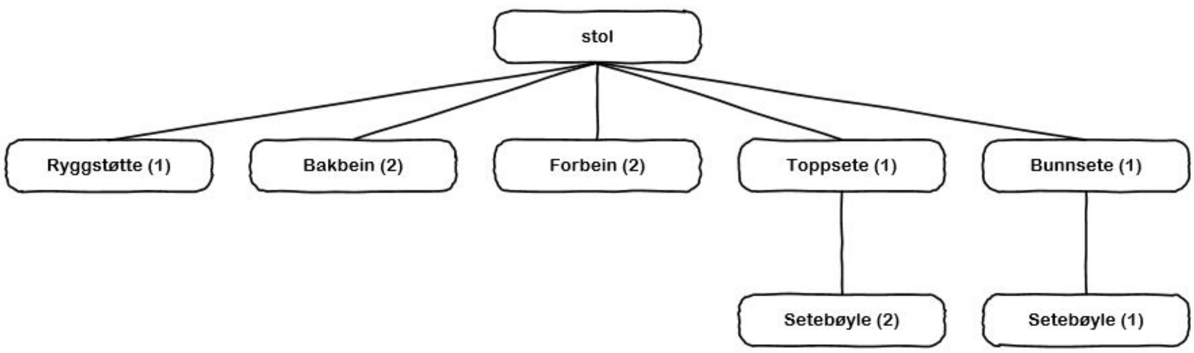
Uke	**init**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prognose		250	200	220	180	240	240	300	210	140	170
Ordrer		240	230	180	200	180	300	200	240	60	70
Lagernivå	1000	760	530	350	150	1110	810	510	300	160	1190
Ledig-til-reservasjon		150				220					1130
MPS						1200					1200

ii Hvis Stokke får inn to bestillinger, en i uke 3 på 80 stoler og en i uke 54 på 100 stoler, så ser vi at disse ukene deskkes av Ledig-TilReservasjon i uke 1. Summen av bestillingene er på 180 stoler, mens Ledig-Til-Reservasjon er kun 150.

Stokke kan dermed *ikke* garantere begge ordrene.

b) Vi skal gjennomføre MRP-beregninger for ”Stokke Steps Chair”-stolen de neste 10 ukene.

i) BOM-strukturen er gitt ved:



Figur 1: BOM-strukturen for ”Stokke Steps Chair” - stolen

ii) Vi har allerede lagd en MPS-plan for selve "Stokke Steps Chair" i oppgave a) (Masterplanen). Det eneste vi må huske er at MPS-planen gir kun når stolene skal være ferdige, dvs MPS-planen tar tar ikke høyde for produksjonstiden, som er 3 uker for en serie på 1200 "Stokke Steps Chair" stoler.

Uke	**Init**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Ryggstøtte											
Bruttobehov			1200					1200			
Planlagt mottak											
Lager	800	800	1100	1100	1100	1100	1100	1400	1400	1400	1400
Nettobehov			400					100			
Planlagt ordre		1500					1500				
Bakbein											
Bruttobehov			2400	2000			2000	2400			
Planlagt mottak		2500									
Lager	1000	3500	1100	1600	1600	1600	2100	2200	2200	2200	2200
Nettobehov				900			400	300			
Planlagt ordre			2500			2500	2500				
Forbein											
Bruttobehov			2400					2400			
Planlagt mottak											
Lager			300	300	300	300	300	600	600	600	600
Nettobehov			2400					2100			
Planlagt ordre		3000					3000				
Toppseter & bunnseter											
Bruttobehov			1200					1200			
Planlagt mottak											
Lager			800	800	800	800	800	1600	1600	1600	1600
Nettobehov			1200					400			
Planlagt ordre		2000					2000				
Setebøyler											
Bruttobehov		6000					6000				
Planlagt mottak		7000									
Lager		500	500	500	500	500	1500	1500	1500	1500	1500
Sikkerhetslager		500	500	500	500	500	500	500	500	500	500
Nettobehov							5500				
Planlagt ordre					7000						

Kommentarer:

- for bakbein har vi lagt inn ordrer fra annen stolvariant: 2000 i uke 3 og uke 6 hhv.
- for forbein har vi trekt ifra svinn fra produksjonen på 10%, som er 300 pr serie på 3000
- for setebøyler har vi multiplisert planlagt ordre fra setene med 3. Vi har også splittet lageret i uke 1 med 500 i sikkerhetslager og 500 i vanlig lager.

c) Vi skal se på sekvensieringen av to produkter som går gjennom de samme tre stasjonene hos Stokke. Vi har en ordre på 60 "Stokke Steps Chair" stoler og en ordre på 30 Tripp-Trapp stoler.

i) For enkelhetsskyld kaller vi ordren for "Stokke Steps Chair" stolene ordre A, mens ordren for Tripp-Trapp stolene kaller vi for ordre B.
Vi må først beregne *bearbeidingstidene* for hver ordre for hver av stasjonene:

Ordre A:

- Stasjon 1: bearbeidingstiden er 60*4 minutter = 240 minutter, dvs 4 timer
- Stasjon 2: bearbeidingstiden er 60*2 minutter = 120 minutter, dvs 2 timer
- Stasjon 3: bearbeidingstiden er 60*5 minutter = 300 minutter, dvs 5 timer

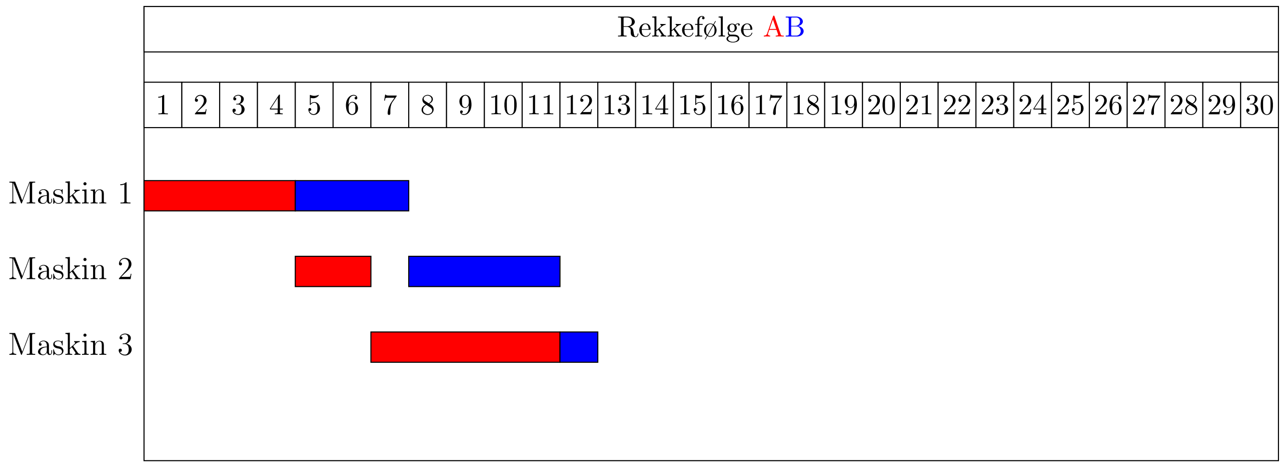
Ordre B:

- Stasjon 1: bearbeidingstiden er 30*6 minutter = 180 minutter, dvs 3 timer
- Stasjon 2: bearbeidingstiden er 30*8 minutter = 240 minutter, dvs 4 timer
- Stasjon 3: bearbeidingstiden er 30*2 minutter = 60 minutter, dvs 1 time

Siden vi har to ordrer og tre stasjoner får vi $2^3 = 8$ muligheter, men i prinsippet er kun *to* av dem aktuelle, siden hvis A prosesseres først på stasjon1, så må også A prosesseres først på stasjon 2 og stasjon 3 hhv. Å splitte ordrerekkeføgen på stasjonene er åpenbart ineffektiv, så vi ser vekk ifra disse. Vi har dermed *to* muligheter: AB eller BA.

Ganttdiagram for situasjonen AB, dvs A først:

Merk: Rød er ordre A mens blå er ordre B:



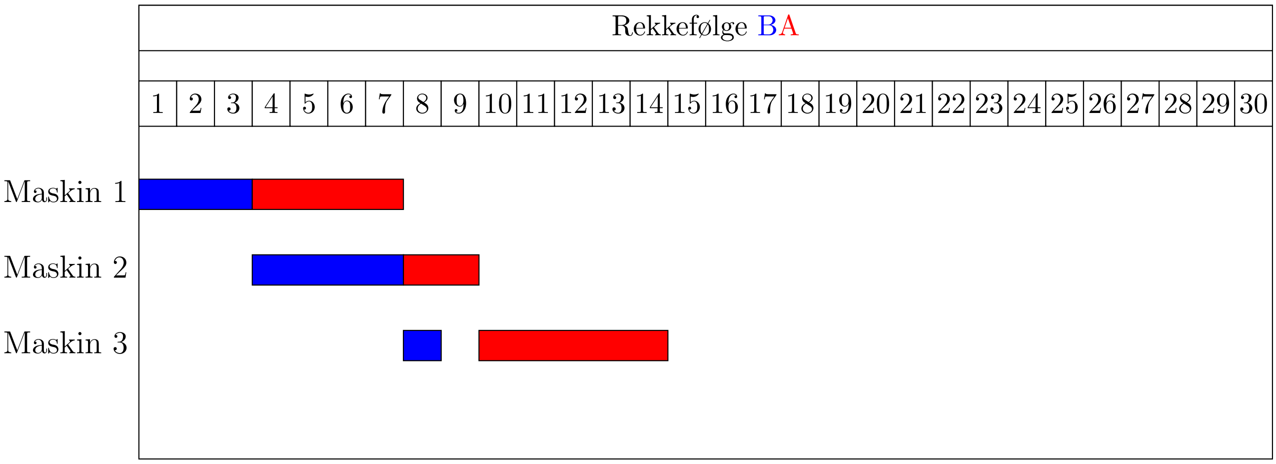
Makespan = sluttid B = 12 timer

Total gjennomløpstid = sluttid A + sluttid B = 11+12=23 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid =Total gjennomløpstid/2 = 23/2=11.5 timer

Ganttdiagram for situasjonen BA, dvs B først:

Merk: Rød er ordre A mens blå er ordre B:



Makespan = sluttid A = 14 timer

Total gjennomløpstid = sluttid A + sluttid B = 14+8=22 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid =Total gjennomløpstid/2 = 22/2=11 timer

Konklusjon:

Vi ser at hvis vi ønsker å minimere makespan, så er det optimalt med rekkefølgen AB, mens hvis vi bruker total gjennomløpstid, så er BA optimal.

Kontinuasjonseksamen 2015

LØSNING: Kontinuasjonseksamen 6. jan 2016

"*SCM200 Lager -og Produksjonsstyring*", vår 2015

Oppgave 1d: ("*Wagner-Within*")

i) Vi skal finne optimal produksjonsplan ved hjelp av Wagner-Within algoritmen.

Data:[1]

$$D_t = \text{etterspørsel uke } t \text{ etter IPhone} \tag{1}$$

$$s = \text{bestillingskostnaden for IPhone} = 100\ 000 \tag{2}$$

$$h = \text{enhetslig overlagringskostnad for 1 Iphone pr uke} = 10 \tag{3}$$

Variabler:

$$X_t = \text{ordrestørrelse uke } t \tag{4}$$

$$I_t = \text{antall IPhoner overlagret fra uke } t \text{ til } t+1 \tag{5}$$

$$Y_t = 0 \text{ eller } 1 \text{ for hvorvidt bestilling finner sted i uke } t \tag{6}$$

[1] Det er ikke nødvendig å skrive opp disse definisjonene på eksamen. Data og variabler er underforståtte for Wagner-Within algoritmen. Vi har kun inkludert disse her for helheltens skyld.

Vi starter som vanlig med delproblemet med kun en periode:[2]

$\underline{P_1}$: (subproblem med kun første periode)

Med en eneste periode, må vi ha produksjon siden vi må oppfylle etterspørselen i periode 1 og startslageret er null. Vi har altså følgende optimale løsning for dette subproblemet:

$$\underline{C_1^*} \;=\; s \cdot Y_1 \;=\; \underline{100} \tag{7}$$

$\underline{P_2}$: (subproblem med de to første periode)

$$\underline{C_2^*} = \min\Big[\, \textit{(siste bestilling i 1. periode)} \;,\; \textit{(siste bestilling i 2. periode)} \Big] \tag{8}$$

$$= \min\Big[\, s + h \cdot D_2 \;,\; s + C_1^* \Big] \tag{9}$$

$$= \min\Big[\, 100 + 10 \cdot 4 \;,\; 100 + 100 \Big] \tag{10}$$

$$= \min\Big[\, \underline{145} \;,\; 200 \Big] \tag{11}$$

$$= \underline{164} \tag{12}$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er C_{10}.

Vi vet da at fra Horisontteoremet, siden det er optimalt siste bestilling skjer før 2 periode, så kan vi se bort ifra alle periodene *før* 1.periode. Men vi har ingen, så her tjente vi ikke noe

[2] Vi skriver alle kostnadstall i antall 1000 for oversiktens skyld. Så setupkostnaden blir 100 mens vi beholder lagerkostnaden slik den er. Dette kan dere også gjøre til eksmanen, så lenge dere bemerker at dere gjør det.

$\underline{P_3}$: (subproblem med de tre første periode)

$$\underline{C_3^*} = \min \Big[\textit{(s.b.1)} \;,\; \textit{(s.b.2)},\; \textit{(s.b.3)} \Big] \tag{13}$$

$$= \min \Big[(s + h \cdot D_2 + 2 \cdot h \cdot D_3) \;,\; (s + h \cdot D_3 + C_1^*) \;,\; (s + C_2^*) \Big] \tag{14}$$

$$= \min \Big[(145 + 2 \cdot 10 \cdot 5.4) \;,\; (200 + 10 \cdot 5.4) \;,\; (145 + 100) \Big] \tag{15}$$

$$= \min \Big[253 \;,\; 254 \;,\; \underline{245} \Big] \tag{16}$$

$$= \underline{245} \tag{17}$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 1. og 2. måned fra videre beregninger.[3]

[3] Legg merke til at vi benytter oss av at vi allerede har beregnet en del av uttrykkene i forrige delproblem.

$\underline{P_4:}$

Legg derfor til at vi starter beregningene fra 3 preiode (og ikke første som vi gjorde i delproblemene over). Dette kommer fra bruk av horisontteoremet.

$$\begin{aligned}
C_4^* &= \min[\ \mathit{(s.b.3)}\ ,\ \mathit{(s.b.4)}] \\
&= \min[(C_2^* + s + h \cdot D_4),\ (C_3^* + s)] \\
&= \min[(245 + 10 \cdot 4,\ (245 + 100)] \\
&= \min[\underline{\underline{285}},\ 345] \\
&= 285
\end{aligned}$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 2. måned fra videre beregninger, noe vi allerede har gjort.

$\underline{P_5\text{:}}$

Vi starter beregningene fra 4. måned.

$$
\begin{aligned}
C_5^* &= \min[(\textit{s.b.3})\ (\textit{s.b.4})\ ,\ (\textit{s.b.5})] \\
&= \min[(C_2^* + s + h \cdot D_4 + 2 \cdot h \cdot D_5),\ (C_3^* + s + h \cdot D_5),\ (C_4^* + s)] \\
&= \min[(285 + 2 \cdot 10 \cdot 3,\ (345 + 10 \cdot 3),\ (285 + 100)] \\
&= \min[\underline{345},\ 375, 385] \\
&= 345
\end{aligned}
$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 3. måned fra videre beregninger, noe vi allerede har gjort.

$\underline{P_6:}$

Vi starter beregningene fra 5. måned.

$$
\begin{aligned}
C_6^* &= \min[(\textit{s.b.3}) \ , \ (\textit{s.b.4}) \ , \ (\textit{s.b.5}) \ , \ (\textit{s.b.6})] \\
&= \min[(C_2^* + s + hD_4 + 2hD_5 + 3hD_6), \ (C_3^* + s + hD_5 + 2hD_6), \ (C_4^* + s + hD_6), \ (C_5^* + s)] \\
&= \min[(345 + 3 \cdot 10 \cdot 5, \ (375 + 2 \cdot 10 \cdot 5), \ (385 + 10 \cdot 5), \ (345 + 100)] \\
&= \min[495, \ 475, \ \underline{435}, \ 445] \\
&= 435
\end{aligned}
$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 3. og 4. måned fra videre beregninger.

$\underline{P_7:}$

Vi starter beregningene fra 6. måned.

$$C_7^* = \min[\ \textit{(s.b.5)}\ ,\ \textit{(s.b.6)}\ ,\ \textit{(s.b.7)}]$$

$$= \min[(C_4^* + s + h \cdot D_6 + 2 \cdot h \cdot D_7),\ (C_5^* + s + h \cdot D_7),\ (C_6^* + s)]$$

$$= \min[(435 + 2 \cdot 10 \cdot 3.8,\ (445 + 10 \cdot 3.8),\ (435 + 100)]$$

$$= \min[511,\ \underline{483},\ 535]$$

$$= 604$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 5. måned fra videre beregninger.

P_8: (det fulle problemet)

Vi starter beregningene fra 6. måned.

$$C_8^* = \min[\ (s.b.6)\ ,\ (s.b.7),\ (s.b.8)]$$

$$= \min[(C_5^* + s + h \cdot D_7 + 2 \cdot h \cdot D_8),\ (C_6^* + s + h \cdot D_8),\ (C_7^* + s)]$$

$$= \min[(483 + 2 \cdot 10 \cdot 5.1,\ (535 + 10 \cdot 5.1),\ (483 + 100)]$$

$$= \min[585,\ 586,\ \underline{583}]$$

$$= 636$$

Vi har nå funnet optimal kostnad. Vi finner optimale produksjonsperioder $C_{xxxxxxxx}$ ved å starte bakfra og jobbe oss frem til periode 1:

$$C_{xxxxxxxx} = C_{xxxxxxxx1} \qquad \text{(siste bestilling i måned 8)} \tag{18}$$

$$C_{xxxxxxx1} = C_{xxxxx101} \qquad \text{(siste bestilling i måned 6)} \tag{19}$$

$$C_{xxxxx101} = C_{xx100101} \qquad \text{(siste bestilling i måned 3)} \tag{20}$$

$$C_{xx100101} = C_{x10100101} \qquad \text{(siste bestilling i måned 1)} \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

Vi har altså $\underline{\underline{C_{10111100} = 583000}}$. videre må vi finne optimale produksjonsmengder og lagermegnder.

ii Produksjonsmengder: (finnes ved hjelp av "dominante produksjonsplaner")

$$X_1 = D_1 + D_2 = 8500 \tag{23}$$
$$X_2 = 0 \tag{24}$$
$$X_3 = D_3 + D_4 + D_5 = 12400 \tag{25}$$
$$X_4 = 0 \tag{26}$$
$$X_5 = 0 \tag{27}$$
$$X_6 = D_6 + D_7 = 8800 \tag{28}$$
$$X_7 = 0 \tag{29}$$
$$X_8 = 5100 \tag{30}$$
$$\tag{31}$$

Lagermengder:

$$I_1 = D_2 = 4500 \tag{32}$$
$$I_2 = 0 \tag{33}$$
$$I_3 = D_4 + D_5 = 7000 \tag{34}$$
$$I_4 = D_5 = 3000 \tag{35}$$
$$I_5 = 0 \tag{36}$$
$$I_6 = D_7 = 3800 \tag{37}$$
$$I_7 = 0 \tag{38}$$
$$I_8 = 0 \tag{39}$$
$$\tag{40}$$

iii Først definerer vi den ukjente variabelen:

$$x = \text{antall enheter vi reduserer etterspørselen } D_6 \tag{41}$$

Første krav på x er at den ikke kan overskride D_6, dvs:

$$0 \leq x \leq D_6 = 5000 \tag{42}$$

For å bestemme hvor mye D_6 må minke før produksjonen i uke 6 forflyttes til periode 7, må vi først se på delproblem P6 (siden det er her D_6 benyttes første gang):

$$\begin{aligned}
C_6^* &= \min[\textit{(s.b.3)}\ ,\ \textit{(s.b.4)}\ ,\ \textit{(s.b.5)}\ ,\ \textit{(s.b.6)}] \\
&= \min[(C_2^* + s + hD_4 + 2hD_5 + 3hD_6),\ (C_3^* + s + hD_5 + 2hD_6),\ (C_4^* + s + hD_6),\ (C_5^* + s)] \\
&= \min[(345 + 3 \cdot 10 \cdot 5,\ (375 + 2 \cdot 10 \cdot 5),\ (385 + 10 \cdot 5),\ (345 + 100)] \\
&= \min[495,\ 475,\ \underline{435},\ 445] \\
&= 435
\end{aligned}$$

Anta nå at vi setter $D_6 = 5 - x$. Insatt i C_6^* gir:

$$\begin{aligned}
C_6^* &= \min[495 - 3hx,\ 475 - 2hx,\ 435 - hx,\ 445] \\
&= \min[495 - 30x,\ 475 - 20x,\ 435 - 10x,\ 445]
\end{aligned}$$

Vi innser at når x minker, vil siste bestilling etterhvert flytte seg fra periode 5 til periode 4 og deretter fa periode 4 til periode 3.

Optimal bestilling flytter seg fra periode 5 til periode 4 når:

$$(\text{s.b.4}) = (\text{s.b.5}) \tag{43}$$

$$475 - 20x = 435 - 10x \tag{44}$$

$$475 - 435 = 20x - 10x \tag{45}$$

$$40 = 10x \tag{46}$$

$$x = 4 \tag{47}$$

Optimal bestilling flytter seg fra periode 5 til periode 3 når:

$$(\text{s.b.3}) = (\text{s.b.5}) \tag{48}$$

$$495 - 30x = 435 - 10x \tag{49}$$

$$495 - 435 = 30x - 10x \tag{50}$$

$$60 = 20x \tag{51}$$

$$x = 3 \tag{52}$$

Så vi får følgende alternativer:

- $0 \leq x \leq 3$: optimal bestilling fremdeles periode 5 og vi kan gå til P7 med $C_6^* = 435 - 10x$
- $3 \leq x \leq 5$: optimal bestilling i periode 5, og vi kan gå til P7 med $C_6^* = 495 - 30x$

Case 1:$0 \leq x \leq 3$

Vi overfører $C_6^* = 435 - 10x$ direkte i P7:

$$C_7^* = \min[\ (s.b.5)\ ,\ (s.b.6)\ ,\ (s.b.7)]$$

$$= \min[511 - 10x,\ 483,\ 535 - 10x], \qquad\qquad x \leq 3$$

Komentarer:

- Legge merke til at alternativet (s.b.6), dvs siste bestilling i uke 6, ikke er avhengig av D_6 siden vi produserer alt selv i denne perioden.
- Legg også merke til at alternativet (s.b.5) alltid vil være mindre enn alternativet (s.b.7).

Vi argumenterer på samme måte som før, at siste bestilling vil flytte seg fra periode 6 til periode 5 etterhvert som v øker x fra 0 til 3.

Optimal bestilling flytter seg fra periode 6 til periode 5 når:

$$\text{(s.b.5)} = \text{(s.b.6)} \tag{53}$$

$$511 - 10x = 483 \tag{54}$$

$$511 - 483 = 10x \tag{55}$$

$$28 = 10x \tag{56}$$

$$x = 2.8 \tag{57}$$

Så vi får følgende to alternativer:

- $0 \leq x \leq 2.8$ - optimal bestilling fremdeles periode 6 og vi kan gå til uendret P8
- $2.8 \leq x \leq 3$ - optimal bestilling flyttes fra periode 6 til periode 5, og P8 endres.

Case 1a: $0 \leq x \leq 2.8$:

P8 er uendret og $C_7^* = 483$ mens $C_6^* = 435 - 10x$:

$$C_8^* = \min[\ (s.b.6)\ ,\ (s.b.7),\ (s.b.8)]$$

$$= \min[585,\ 586 - 10x,\ 583]$$

Vi ser at siste bestilling i periode 8 vil flytte seg til periode 7 etterhvert som x øker fra 0 til 2.8.

Optimal bestilling flytter seg fra periode 5 til periode 3 når:

$$(\text{s.b.7}) = (\text{s.b.8}) \tag{58}$$

$$586 - 10x = 583 \tag{59}$$

$$586 - 583 = 10x \tag{60}$$

$$3 = 10x \tag{61}$$

$$x = \frac{3}{10} \tag{62}$$

Konklusjon:

Anta $\frac{3}{10} < x \leq 2.8$. Da er siste bestiling i uke 7 og vi får:

$$C_{xxxxxx10} \text{ (gå til delproblem P6)} \tag{63}$$

$$C_{xxxx1010} \text{ (gå til delproblem P4)} \tag{64}$$

$$C_{xx101010} \text{ (gå til delproblem P2)} \tag{65}$$

$$C_{10101010} \tag{66}$$

Hvis vi reduserer D_6 med $x = \frac{3}{10} \cdot 1000 + 1 = 300 + 1 = 301$ enheter, flyttes produksjonen fra periode 6 til periode 7.[4]

Etterspørselen for periode 6 blir da: $\underline{\underline{D_6 = 5000 - 301 = 4699}}$.

[4]Vi legger til en ekstra enhet, siden (s.b.7) og (s.b.8) er lik når $x = \frac{3}{10}$.

d iv Vi skal utvide modellen under antakelsen at Apple har en øvre grense på ordrestørrelse lik 10000 IPhoner.

Nye data:

Vi har maksimalt antall bestilte IPhoner:

$$K = 10000 \qquad \text{maksimal bestillingsmengde fra Apple} \tag{67}$$

Nye føringer:

Vi får en maksimal grense for antall bestilte IPhoner pr uke:

$$X_t \leq K \qquad \text{for alle } t \tag{68}$$

d v For å sjekke om løsningen fra oppgave 1d.i) er oppfylt, må vi sjekke om kapasitetsføringene er oppfylt.

Vi hadde optimal produksjonsplan:

$$
\begin{align}
X_1 &= D_1 + D_2 = 8500 \tag{69}\\
X_2 &= 0 \tag{70}\\
X_3 &= D_3 + D_4 + D_5 = 12400 \tag{71}\\
X_4 &= 0 \tag{72}\\
X_5 &= 0 \tag{73}\\
X_6 &= D_6 + D_7 = 8800 \tag{74}\\
X_7 &= 0 \tag{75}\\
X_8 &= 5100 \tag{76}\\
& \tag{77}
\end{align}
$$

Vi ser at bestillingen i uke 3 på 12400 IPhoner overskrider grensen på 10000 IPhoner.

Løsningen er dermed ikke optimal under den nye betingelsen.

Wagner-Withins kjente resultat om "Dominante produksjonsplaner" er ikke lenger gyldig under den nye policyføringen ifra Apple. Vi kan med andre ord ikke lenger bestille hele etterspørselsbehov siden bestillingen dermed overskrider grensen.

Vi må derfor dele opp bestillingen i uke 3.

Vi kan f.eks. flytte overlagringen fra periode 3 til periode 5 til bestilling i periode 5 istedet:

Ny gyldig produksjonsplan:

$$X_1 = D_1 + D_2 = 8500 \tag{78}$$
$$X_2 = 0 \tag{79}$$
$$X_3 = D_3 + D_4 = 12400 \tag{80}$$
$$X_4 = 0 \tag{81}$$
$$X_5 = D5 = 5000 \tag{82}$$
$$X_6 = D_6 + D_7 = 8800 \tag{83}$$
$$X_7 = 0 \tag{84}$$
$$X_8 = 5100 \tag{85}$$
$$\tag{86}$$

Testeksamen 2016

LØSNING: Testeksamen mai 2016

"*SCM200 Lager -og Produksjonsstyring*", vår 2016

Oppgave 1: (prognostisering)

a) Plottet av historiske data viser et irregulært (tilfeldig) mønster.

Dette begrunnes ved eliminasjonsmetoden:

- Mønsteret viser ikke oppadstigende eller nedadstigende trend
- Mønsteret har ikke syklisk svingninger
- Mønsteret viser ingen sesongavhengigheter

Vi kan dermed konkludere at mønsteret er tilfeldig.

b) Siden produksjonsplanleggerne vektlegger en jevn produksjon, er det fordelaktig å glatte vekk variasjonen i datasettet.

Ved å velge høy glattingaparameter, får vi høy glatting ved bruk av eksponensiell glatting.

Vi velger derfor den høye glattingsparameteren $\theta_2 = 0.7$.

c) Vi skal lage en prognose for de 12 månedene i 2016 ved hjelp av eksponensiell glatting med glattingsparameter $\theta = 0.7$. Vi bruker den rekursive formelen for å beregne prognosene:

$$F_2 = X_1 = 30 \tag{1}$$

$$F_3 = \theta F_2 + (1-\theta)X_2 = 0.7 \cdot 30 + 0.3 \cdot 25 = 28.5 \tag{2}$$

$$F_4 = \theta F_3 + (1-\theta)X_3 = 0.7 \cdot 28.5 + 0.3 \cdot 40 = 32 \tag{3}$$

$$F_5 = \theta F_4 + (1-\theta)X_4 = 0.7 \cdot 32 + 0.3 \cdot 35 = 32.87 \tag{4}$$

$$F_6 = \theta F_5 + (1-\theta)X_5 = 0.7 \cdot 32.87 + 0.3 \cdot 20 = 29.00 \tag{5}$$

$$F_7 = \theta F_6 + (1-\theta)X_6 = 0.7 \cdot 29.00 + 0.3 \cdot 50 = 35.3 \tag{6}$$

$$F_8 = \theta F_7 + (1-\theta)X_7 = 0.7 \cdot 35.3 + 0.3 \cdot 40 = 36.71 \tag{7}$$

$$F_9 = \theta F_8 + (1-\theta)X_8 = 0.7 \cdot 36.71 + 0.3 \cdot 45 = 39.2 \tag{8}$$

$$F_{10} = \theta F_9 + (1-\theta)X_9 = 0.7 \cdot 39.2 + 0.3 \cdot 30 = 36.44 \tag{9}$$

$$F_{11} = \theta F_{10} + (1-\theta)X_{10} = 0.7 \cdot 36.44 + 0.3 \cdot 35 = 36.01 \tag{10}$$

$$F_{12} = \theta F_{11} + (1-\theta)X_{11} = 0.7 \cdot 36.010.3 \cdot 45 = 38.71 \tag{11}$$

$$F_{13} = \theta F_{12} + (1-\theta)X_{12} = 0.7 \cdot 38.71 + 0.3 \cdot 15 = 31.6 \tag{12}$$

Vi har nå funnet prognosen for måned 13 (januar 2016). Siden mønsteret er irregulært, setter vi alle månedene konstant lik F_{13}:

$$\underline{\underline{F_{13} = F_{14} = F_{15} = F_{16} = F_{17} = F_{18} = F_{19} = F_{20} = F_{21} = F_{22} = F_{21} = F_{24} = 31.6 \approx 32}}$$

d) Vi skal beregne MAD (gjennomsnittlig absolutt avvik) for de historiske prognosene vi beregnet i oppgave 1c):

$$\underline{\underline{MAD}} = \frac{1}{11}\sum_{t=2}^{12}|X_t - F_t| \tag{13}$$

$$= \frac{1}{11}(|25-30| + |40-28.5| + |35-32| + |20-32.97| \tag{14}$$

$$+ |50-29| + |40-35.3| + |45-36.71| + |30-39.2| \tag{15}$$

$$+ |35-36.44| + |45-36.01| + |15-38.71|) \tag{16}$$

$$= \underline{\underline{9.981}} \tag{17}$$

2) (aggregert planlegging)

a) Siden årlig rentesats er $r = 0.1$, får vi:

$$\underline{\underline{H_1}} = 100000 \cdot \frac{P_1 r}{12} = 100000 \cdot \frac{50 \cdot 0.1}{12} = 416667 \approx \underline{\underline{41700}} \tag{18}$$

$$\underline{\underline{H_2}} = 100000 \cdot \frac{P_2 r}{12} = 100000 \cdot \frac{100 \cdot 0.1}{12} = 83333 \approx \underline{\underline{83300}} \tag{19}$$

$$\underline{\underline{H_3}} = 100000 \cdot \frac{P_3 r}{12} = 100000 \cdot \frac{80 \cdot 0.1}{12} = 66667 \approx \underline{\underline{66700}} \tag{20}$$

$$\underline{\underline{H_4}} = 100000 \cdot \frac{P_4 r}{12} = 100000 \cdot \frac{120 \cdot 0.1}{12} = \underline{\underline{100000}} \tag{21}$$

hvor

$$H_i = \text{lagerkostnad pr måned pr 100 000 liter maling, for familie } i,\ i = 1,2,3,4 \tag{22}$$

$$P_i = \text{salgsverdi pr liter maling, for familie } i,\ i = 1,2,3,4 \tag{23}$$

$$r = \text{årlig rentesats} \tag{24}$$

b) Vi får oppgitt i oppgaven at hver familie har et gitt antall regulære produksjonstimer til rådighet hver måned for hver familie. I tillegg kan hver familie benytte opp til 100 timer overtid hver måned.

Kapasiteten for hver familie for hver måned må dermed minst oppfylle:

$$\text{timer brukt} \leq \text{antall regulære timer} + \text{maksimalt antall overtidstimer} \tag{25}$$

I tillegg til å sjekke om kapasitetsføringen over er oppfylt, må vi bokføre hvor mange timer vi har til overs i hver måned. Disse timene akkumuleres til neste periode som representerer mulighet for overlagring til påfølgende måneder med kapasitetssprekk.

Vi sjekker at kapasiteten er oppfylt for hver familie.

Familie 1 (interiør):

Siden etterspørselen for familie 1 er konstant lik 32, er det nok å sjekke at kapasiteten er oppfylt for en vilkårlig måned:

Måned	**Timer behov**	**Tilgjengelige timer**	**Timer til overs**
t	480	720 + 100+0=820	340

Vi kan tolke denne tabellen på følgende måte:

For hver måned kreves det 32*15=480 timer. Vi har 720 regulære timer til overs, samt mulighet for 100 timer overtid. Totalt har vi dermed 720+100=820 tilgengelige timer. Vi får dermed 820-480 = 340 timer til overs i hver måned. Det er dermed ikke behov for overlagring eller bruk av overtid.

Familie 2 (Utendørs):

Siden etterspørselen for familie 2 er varierende, må vi sjekke alle månedene hver for seg[1]:

Måned	**Timer behov**	**Tilgjengelige timer**	**Timer til overs**
1	260	960 + 100+0=1060	800
2	520	960 + 100 + 800=1860	1340
3	780	960 + 100 + 1340=2400	1620
4	1560	960 + 100 + 1620=2680	1120
5	2080	960 + 100 + 1120 =2180	100
6	2600	960 + 100 + 100=1160	-1440
7	1820	960 + 100 + 0=1060	-760
8	1300	960 + 100 + 0=1060	-240
9	780	960 + 100 + 0=1060	280
10	260	960 + 100 + 280=1340	1080
11	260	960 + 100 + 1080=2140	1880
12	130	960 + 100 + 1880=2940	2810

Legg merke til at vi legger til timene til overs fra en måned som tilgjengelige timer i neste måned, siden dette representerer muligheten for overlagring (blå tt).

Som vi ser fra tabellen har vi tre måneder med kapasitetssprekk: måned 6, 7 og 8 (rødt).

[1]Kolonnen "Timer behov" regnes ut ved å multiplisere etterspørselen med bearbeidingstiden 26.

Familie 3 (Båt):

Siden etterspørselen for familie 3 er varierende, må vi sjekke alle månedene hver for seg[2]:

Måned	**Timer behov**	**Tilgjengelige timer**	**Timer til overs**
1	40	240 + 100+0=1060	300
2	80	240 + 100 + 300=640	560
3	120	240 + 100 + 560=900	780
4	160	240 + 100 + 780=1120	960
5	480	240 + 100 + 960 =1300	820
6	600	240 + 100 + 820=1160	560
7	560	240 + 100 + 560=900	340
8	400	240 + 100 + 340=680	280
9	160	240 + 100 + 280=620	460
10	80	240 + 100 + 460=800	720
11	40	240 + 100 + 720=1060	1020
12	40	240 + 100 + 1020=1360	1320

Legg merke til at vi legger til timene til overs fra en måned som tilgjengelige timer i neste måned, siden dette representerer muligheten for overlagring (blå tt).

Som vi ser fra tabellen har alle månedene nok kapasitet.

[2]Kolonnen "Timer behov" regnes ut ved å multiplisere etterspørselen med bearbeidingstiden 40.

Familie 4 (Fabrikk):

Siden etterspørselen for familie 3 er varierende, må vi sjekke alle månedene hver for seg[3]:

Måned	Timer behov	Tilgjengelige timer	Timer til overs
1	300	240 + 100+0=340	40
2	360	240 + 100 + 40=380	20
3	180	240 + 100 + 20=360	180
4	480	240 + 100 + 180=520	40
5	300	240 + 100 + 40 =380	80
6	300	240 + 100 + 80=420	120
7	240	240 + 100 + 120=460	220
8	120	240 + 100 + 220=560	440
9	180	240 + 100 + 440=780	600
10	300	240 + 100 + 600=940	640
11	240	240 + 100 + 640=980	740
12	300	240 + 100 + 740=1080	780

Legg merke til at vi legger til timene til overs fra en måned som tilgjengelige timer i neste måned, siden dette representerer muligheten for overlagring (blå tt).

Som vi ser fra tabellen har alle månedene nok kapasitet.

[3]Kolonnen "Timer behov" regnes ut ved å multiplisere etterspørselen med bearbeidingstiden 60.

c) Siden denne modellen er nokså stor, må vi benytte indeksnotasjon. Vi har to indekser for dette problemet:

- produktfamiliene, som indekseres ved $i = 1, 2, 3, 4$, (interør, utendørs, båt, fabrikk)
- månedene, som indekseres ved $t = 1, 2, \ldots, 12$.

$$
\begin{aligned}
I_{i0} &= \text{startlager inn til uke 1 for familie } i && (26)\\
I_{i12} &= \text{sluttlager i uke 12 for familie } i && (27)\\
D_{it} &= \text{etterspørsel for familie } i \text{ i uke } t && (28)\\
h_{it} &= \text{overlagringskostnad per 100 000 liter pr måned for familie } i \text{ fra uke } t && (29)\\
s_i &= \text{setupkostnad for familie } i && (30)\\
r_i &= \text{bearbeidingstid for familie } i && (31)\\
R_i &= \text{antall regulære timer tilgjengelig for familie } i && (32)\\
O^m &= \text{maksimalt antall overtidstimer tilgjengelig for hver familie i hver måned} && (33)\\
C^R &= \text{kostnad pr regulær time} && (34)\\
C^{75} &= \text{kostnad pr time overtid for de 75 første overtidstimene pr måned} && (35)\\
C^{25} &= \text{kostnad pr time overtid for de 25 siste overtidstimene pr måned} && (36)\\
& && (37)
\end{aligned}
$$

Vi har ikke oppgitt tallverdien på C^{75} og C^{25} så disse må vi presisere:

$$
\begin{aligned}
C^{75} &= 1.5C^R = 15000 && (38)\\
C^{25} &= 2C^R = 20000 && (39)
\end{aligned}
$$

<u>Kommentar:</u>

Det er ikke nødvendig å sette opp data som ikke benyttes i modellen. Dette gjelder for eksempel salgsverdien pr liter pr familie og rentesatsen. Disse dataene har vi allerede benyttet for å finne de enhetslige lagerkostnadene h_i.

d) Vi har tre typer beslutninger i oppgaven:

- Produksjonsmengde - hvor mange enheter produsert (i 100 000 liter)
- Overlagring - hvor mange enheter overlagret (i 100 000 liter)
- Overtid - hvor mange overtidstimer brukt

Produksjonsmengde:

$$X_{it} = \text{antall enheter produsert av familie } i \text{ i måned } t \tag{40}$$

Overlagring:

$$I_{it} = \text{antall enheter overlagret av familie } i \text{ fra måned } t \text{ til } t+1 \tag{41}$$

Overtid:

Overtidsvariabelen krever litt mer omtanke. Problemet ligger i at overtidskostnaden er splittet i to typer:

- Type 75 - de 75 første overtidstimene tilgjengelig pr måned pr familie
- Type 25 - de 25 siste overtidstimene tilgjengelig pr måned pr familie

For å fange opp begge kostnadene, definerer vi to overtidsvariabler; en for hver type:

$$O_{it}^{75} = \text{antall type 75 overtidstimer brukt for familie } i \text{ i måned } t \tag{42}$$

$$O_{it}^{25} = \text{antall type 25 overtidstimer brukt for familie } i \text{ i måned } t \tag{43}$$

e) Målfunksjonen består av totale lager- og overtidskostnader:

$$C = (\text{totale lagerkostnader}) + (\text{totale overtidskostnader}) \tag{44}$$

$$= (\text{tot. lagerkostn.}) + (\text{tot. overtidskostn. type 75} + \text{tot. overtidskostn. type 25}) \tag{45}$$

$$= \sum_{i=1}^{4}\sum_{t=1}^{12} h_i I_{it} + \sum_{i=1}^{4}\sum_{t=1}^{12} C^{75} O_{it}^{75} + \sum_{i=1}^{4}\sum_{t=1}^{12} C^{25} O_{it}^{25} \tag{46}$$

Kommentar:

Legg merke til at vi har splittet den totale overtidskostnaden i to kostnadsledd: type 75 og type 25.

f) Vi identifiserer hvilke føringer vi har:

- Lagerbalanse
- Produksjonskapasitet
- Overtidskapasitet

Lagerbalanse:

$$I_{it-1} + X_{it} - D_{it} = I_{ti}, \qquad \text{for alle } i \text{ og } t \tag{47}$$

Produksjonskapasitet:

$$\text{(antall timer brukt)} \leq \text{(antall timer tilgjengelig)} \tag{48}$$

$$\text{(ant. timer brukt} \leq \text{(ant. regulære timer} + \text{ant. type 75 timer} + \text{ant. type 25 timer)} \tag{49}$$

$$r_i X_{it} \leq R_i + O_{it}^{75} + O_{it}^{25} \tag{50}$$

Maks antall overtidstimer:

$$O_{it}^{75} \leq 0.75 O^m = 75 \tag{51}$$

$$O_{it}^{25} \leq 0.25 O^m = 25 \tag{52}$$

$$\tag{53}$$

g) Et sikkerhetslager er i realiteten et minimumslager, dvs. et lager som aldri skal berøres. Vi får dermed en ny datastørrelse og en ny føring:

Nye data:

Ny data er sikkerhetsnivået:

$$SS = MAD = 9.9 = \text{sikkerhetslager} \tag{54}$$

Nye føring:

Siden et sikkerhetslager i realiteten er et minimumslager, får vi:

$$I_{it} \geq SS \qquad \text{for alle } i \text{ og } t \tag{55}$$

3) (EOQ)

a)

Denne oppgaven handler om å finne de nødvendige dataene for å beregne EOQ-størrelsene for de tre LADY-produktene.

Vi har at total etterspørsel for interiørfamilien er $D_1 = 32$. I oppgaven får vi oppgitt at LADY-merket utgjør halvparten:

$$D_{\text{LADY}} = D_1/2 = 32/2 = 16 \qquad \text{(i 100 000 liter pr. måned)} \tag{56}$$

Vi definerer følgende indekser:

- $i = F, T, G$, representerer Forberedelsesprdukt, Toppstrøk og Grunning hhv. (LADY).

for å få månedslig etterspørsel, må vi dividere med 4:

$$\underline{\underline{D_F}} = \frac{0.1 \cdot D_{\text{LADY}}}{4} = \frac{0.1 \cdot 16}{4} = \underline{\underline{0.4}} \qquad \text{(i 100 000 liter pr. uke)} \tag{57}$$

$$\underline{\underline{D_T}} = \frac{0.6 \cdot D_{\text{LADY}}}{4} = \frac{0.6 \cdot 16}{4} = \underline{\underline{2.4}} \qquad \text{(i 100 000 liter pr. uke)} \tag{58}$$

$$\underline{\underline{D_G}} = \frac{0.3 \cdot D_{\text{LADY}}}{4} = \frac{0.3 \cdot 16}{4} = \underline{\underline{1.2}} \qquad \text{(i 100 000 liter pr. uke)} \tag{59}$$

Vi skal videre beregne ukentlige enhets lagerkostnader. I dette tilfellet er det kostnaden for å overlagre 100 000 liter i en uke.[4]

Lagerkostnaden pr 100 000 liter pr uke, er kun gitt ved kapitalkostnaden, dvs rentekostnaden som vi får fra produktets salgsverdi. siden rentesatsen, $r = 0.1$ er årlig, må vi dividere med 52 uker, for å få ukentlig lagerkostnad. Siden salgsverdien P_i er pr liter, må vi i tillegg multiplisere med 100 000, for å få lagerkostnad pr 100 000 liter:

$$\underline{\underline{h_F}} = \frac{P_F r}{52} \cdot 100000 = \frac{30 \cdot 0.1}{52} \cdot 100000 = \underline{\underline{5769}} \qquad \text{(pr 100 000 liter pr. uke)} \tag{60}$$

$$\underline{\underline{h_T}} = \frac{P_T r}{52} \cdot 100000 = \frac{80 \cdot 0.1}{52} \cdot 100000 = \underline{\underline{15385}} \qquad \text{(pr 100 000 liter pr. uke)} \tag{61}$$

$$\underline{\underline{h_G}} = \frac{P_G r}{52} \cdot 100000 = \frac{50 \cdot 0.1}{52} \cdot 100000 = \underline{\underline{9615}} \qquad \text{(pr 100 000 liter pr. uke)} \tag{62}$$

Til slutt beregner vi enkelt setupkostnaden ved å multiplisere antall omstillingstimer med den regulære timekostnaden $C_R = 10000$:

$$\underline{\underline{S_F}} = 3 \cdot C_R = 3 \cdot 10000 = 30000 \qquad \text{(kroner pr setup)} \tag{63}$$

$$\underline{\underline{S_T}} = 5 \cdot C_R = 5 \cdot 10000 = 50000 \qquad \text{(kroner pr setup)} \tag{64}$$

$$\underline{\underline{S_G}} = 4 \cdot C_R = 4 \cdot 10000 = 40000 \qquad \text{(kroner pr setup)} \tag{65}$$

[4]Oppgaveteksten er utydelig når det gjelder denne oppgaven. På eksamen gis det enten beskjed om det hvis det oppdages under eksamen, hvis ikke, vil oppgaven gi korrekt dersom dere skulle tolke oppgaven feil.

b) Vi skal beregne optimale ordrestørrelser (EOQ) for de tre LADY-produktene samt totale kostnader.

Siden vi har alle de nødvendige dataene fra oppgave 3a), kan vi sette direkte inn i Wilsons formel:

$$X_F^* = \sqrt{\frac{2D_F S_F}{H_F}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.4 \cdot 30000}{5769}} = 2.04 \qquad \text{(i 100 000 liter)} \tag{66}$$

$$X_T^* = \sqrt{\frac{2D_T S_T}{H_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.4 \cdot 50000}{15385}} = 3.95 \qquad \text{(i 100 000 liter)} \tag{67}$$

$$X_G^* = \sqrt{\frac{2D_G S_G}{H_G}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.2 \cdot 40000}{9615}} = 3.16 \qquad \text{(i 100 000 liter)} \tag{68}$$

Totale optimale kostnader er lik summen av kostnadene for de tre LADY-produktene:

$$\underline{\underline{C^*}} = C_F^* + C_T^* + C_G^* \tag{69}$$

$$= \left(\frac{S_F D_F}{X_F^*} + \frac{H_F X_F^*}{2}\right) + \left(\frac{S_T D_T}{X_T^*} + \frac{H_T X_T^*}{2}\right) + \left(\frac{S_G D_G}{X_G^*} + \frac{H_G X_G^*}{2}\right) \tag{70}$$

$$= H_F X_F^* + H_T X_T^* + H_G X_G^* \tag{71}$$

$$= 5769 \cdot 2.04 + 15385 \cdot 3.95 + 9615 \cdot 3.16 \tag{72}$$

$$= \underline{\underline{102914}} \tag{73}$$

Steg (**??**) er gyldig fordi setupkostnaden og lagerkostnaden er lik for EOQ-verdien.[5]

[5]Dette er alts kun gyldig for de optimale ordrestørrelsene. Grunnen til at vi skriver dette opp, er fordi utregningene blir enklere.

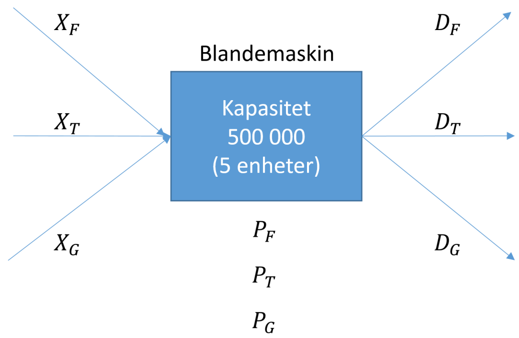
c) Vi skal regne ut omløpstidene for de tre LADY-produktene:[6]

$$\underline{\underline{O_F}} = \frac{X_F^*}{D_F}\frac{2.04}{0.4} = \underline{\underline{5.2}} \qquad \text{(i antall uker)} \tag{74}$$

$$\underline{\underline{O_T}} = \frac{X_T^*}{D_T}\frac{3.95}{2.4} = \underline{\underline{1.6}} \qquad \text{(i antall uker)} \tag{75}$$

$$\underline{\underline{O_G}} = \frac{X_F^*}{D_F}\frac{3.16}{1.2} = \underline{\underline{2.6}} \qquad \text{(i antall uker)} \tag{76}$$

d) Vi skaffer oss oversikt over situasjonen ved hjelp figur **??**.



Figur 1: Oversikt over situasjonen med produksjonsrate

Som vi ser er X-variablene mengden vi skal produsere, mens P-variablene er hastigheten/raten vi produserer i antall liter pr uke.[7]

[6]Omløpstiden er syklustiden, dvs tiden fra lageret fylles til det er tomt.
[7]Vi har benyttet indeksen $i = F, T, G$ istedet for $i = 1, 2, 3$ som opplyst i oppgaven for å få bedre forståelse.

Målfunksjonen:

Siden LADY-produktene nå er koblet med hverandre via produksjonskapasiteten på maskinen, må vi summere enkeltkostnadene for LADY-produktene:

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C_F + C_T + C_G}} \tag{77}$$

føringer:

Vi identifiserer to føringer:

- policyføringer - produksjonsraten for et produkt må være større enn etterspørselsraten
- kapasitetsføring - maskinen kan ikke produsere mer enn total 5 enheter pr uke, dvs summen av produksjonsratene må være mindre enn 5.

Policyføringene:

$$P_i \geq D_i \qquad \text{(for alle } i = F, T, G \text{)} \tag{78}$$

Kapasitetsføringen

$$P_F + P_T + P_G \leq 5 \tag{79}$$

4) (Wagner-Within)

a) Vi skal finne optimal produksjonsplan ved hjelp av Wagner-Within algoritmen.

Data:[8]

$$D_t = \text{etterspørsel måned } t \text{ av Drygolin Ultimat} \tag{80}$$

$$s = \text{setupkostnaden for Drygolin Ultimat} = 100000 \tag{81}$$

$$h = \text{enhetslig overlagringskostnad for Drygolin Ultimat (pr 100 000 liter) pr måned} = 8000 \tag{82}$$

Variabler:

$$X_t = \text{produksjonsmengde i måned } t \tag{83}$$

$$I_t = \text{mengde overlagret fra måned } t \text{ til } t+1 \tag{84}$$

$$Y_t = 0 \text{ eller } 1 \text{ for hvorvidt produksjon finner sted i måned } t \tag{85}$$

[8]Det er ikke nødvendig å skrive opp disse definisjonene på eksamen. Data og variabler er underforståtte for Wagner-Within algoritmen. Vi har kun inkludert disse her for helheltens skyld.

Vi starter som vanlig med delproblemet med kun en periode:[9]

$\underline{P_1}$: (subproblem med kun første periode)

Med en eneste periode, må vi ha produksjon siden vi må oppfylle etterspørselen i periode 1 og startslageret er null. Vi har altså følgende optimale løsning for dette subproblemet:

$$\underline{C_1^*} \;=\; s \cdot Y_1 \;=\; \underline{100} \tag{86}$$

$\underline{P_2}$: (subproblem med de to første periode)

$$\underline{C_2^*} = \min\Big[\,\textit{(siste bestilling i 1. periode)}\;,\;\textit{(siste bestilling i 2. periode)}\Big] \tag{87}$$

$$= \min\Big[\,s + h \cdot D_2 \;,\; s + C_1^*\Big] \tag{88}$$

$$= \min\Big[\,100 + 8 \cdot 8 \;,\; 100 + 100\Big] \tag{89}$$

$$= \min\Big[\,\underline{164} \;,\; 200\Big] \tag{90}$$

$$= \underline{164} \tag{91}$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er C_{10}.

Vi vet da at fra Horisontteoremet, siden det er optimalt siste bestilling skjer før 2 periode, så kan vi se bort ifra alle periodene *før* 1.periode. Men vi har ingen, så her tjente vi ikke noe

[9] Vi skriver alle kostnadstall i antall 1000 for oversiktens skyld. Så setupkostnaden blir 100 mens lagerkostnaden blir 8. Dette kan dere også gjøre til eksmanen, så lenge dere bemerker at dere gjør det.

$\underline{P_3}$: (subproblem med de tre første periode)

$$\underline{C_3^*} = \min\Big[\,\textit{(s.b.1)}\;,\;\textit{(s.b.2)},\;\textit{(s.b.3)}\Big] \tag{92}$$

$$= \min\Big[\,(s + h \cdot D_2 + 2 \cdot h \cdot D_3)\;,\;(s + h \cdot D_3 + C_1^*)\;,\;(s + C_2^*)\Big] \tag{93}$$

$$= \min\Big[\,(164 + 2 \cdot 8 \cdot 10)\;,\;(200 + 80)\;,\;(164 + 100)\Big] \tag{94}$$

$$= \min\Big[\,324\;,\;280\;,\;\underline{264}\Big] \tag{95}$$

$$= \underline{264} \tag{96}$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 1. og 2. måned fra videre beregninger.[10]

[10]Legg merke til at vi benytter oss av at vi allerede har beregnet en del av uttrykkene i forrige delproblem.

$\underline{P_4\text{:}}$

Legg derfor til at vi starter beregningene fra 3 preiode (og ikke første som vi gjorde i delproblemene over). Dette kommer fra bruk av horisontteoremet.

$$
\begin{aligned}
C_4^* &= \min[\ (s.b.3)\ ,\ (s.b.4)] \\
&= \min[(C_2^* + s + h \cdot D_4),\ (C_3^* + s)] \\
&= \min[(164 + 100 + 8 * 14,\ (264 + 100)] \\
&= \min[376,\ \underline{364}] \\
&= 364
\end{aligned}
$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 3. måned fra videre beregninger.

$\underline{P_5:}$

Vi starter beregningene fra 4. måned.

$$
\begin{aligned}
C_5^* &= \min[\ \textit{(s.b.4)}\ ,\ \textit{(s.b.5)}] \\
&= \min[(C_3^* + s + h \cdot D_5),\ (C_4^* + s)] \\
&= \min[(364 + 8 * 20,\ (364 + 100)] \\
&= \min[524,\ \underline{464}] \\
&= 464
\end{aligned}
$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 4. måned fra videre beregninger.

$\underline{P_6\text{:}}$

Vi starter beregningene fra 5. måned.

$$
\begin{aligned}
C_6^* &= \min[\ \textit{(s.b.5)}\ ,\ \textit{(s.b.6)}] \\
&= \min[(C_4^* + s + h \cdot D_6),\ (C_5^* + s)] \\
&= \min[(464 + 8 * 25,\ (464 + 100)] \\
&= \min[664,\ \underline{564}] \\
&= 564
\end{aligned}
$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 5. måned fra videre beregninger.

$\underline{P_7:}$

Vi starter beregningene fra 6. måned.

$$
\begin{aligned}
C_7^* &= \min[\ \textit{(s.b.6)}\ ,\ \textit{(s.b.7)}] \\
&= \min[(C_5^* + s + h \cdot D_7),\ (C_6^* + s)] \\
&= \min[(564 + 8 * 5,\ (564 + 100)] \\
&= \min[\underline{604},\ 664] \\
&= 604
\end{aligned}
$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 5. måned fra videre beregninger. dette har vi allerede gjort.

$\underline{P_8\text{: (det fulle problemet)}}$

Vi starter beregningene fra 6. måned.

$$\begin{aligned} C_8^* &= \min[\ (s.b.6)\ ,\ (s.b.7),\ (s.b.8)] \\ &= \min[(C_5^* + s + h \cdot D_7 + 2 \cdot h \cdot D_8),\ (C_6^* + s + h \cdot D_8),\ (C_7^* + s)] \\ &= \min[(604 + 2 \cdot 8 \cdot 2,\ (664 + 8 \cdot 2),\ (604 + 100)] \\ &= \min[\underline{636},\ 680,\ 704] \\ &= 636 \end{aligned}$$

Vi har nå funnet optimal kostnad. Vi finner optimale produksjonsperioder $C_{xxxxxxxx}$ ved å starte bakfra og jobbe oss frem til periode 1:

$$C_{xxxxxxxx} = C_{xxxxx100} \qquad \text{(siste bestilling i måned 6)} \tag{97}$$

$$C_{xxxxx100} = C_{xxxx1100} \qquad \text{(siste bestilling i måned 5)} \tag{98}$$

$$C_{xxxx1100} = C_{xxx11100} \qquad \text{(siste bestilling i måned 4)} \tag{99}$$

$$C_{xxx11100} = C_{xx111100} \qquad \text{(siste bestilling i måned 3)} \tag{100}$$

$$C_{xx111100} = C_{10111100} \qquad \text{(siste bestilling i måned 1)} \tag{101}$$

$$\tag{102}$$

Vi har altså $\underline{\underline{C_{10111100} = 636000}}$. videre må vi finne optimale produksjonsmengder og lagermegnder.

Produksjonsmengder: (finnes ved hjelp av "dominante produksjonsplaner")

$$X_1 = D_1 + D_2 = 13 \tag{103}$$
$$X_2 = 0 \tag{104}$$
$$X_3 = D_3 = 10 \tag{105}$$
$$X_4 = D_4 = 15 \tag{106}$$
$$X_5 = D_5 = 20 \tag{107}$$
$$X_6 = D_6 + D_7 + D_8 = 32 \tag{108}$$
$$X_7 = 0 \tag{109}$$
$$X_8 = 0 \tag{110}$$
$$\tag{111}$$

Lagermengder:

$$I_1 = D_2 = 8 \tag{112}$$
$$I_2 = 0 \tag{113}$$
$$I_3 = 0 \tag{114}$$
$$I_4 = 0 \tag{115}$$
$$I_5 = 0 \tag{116}$$
$$I_6 = D_7 + D_8 = 7 \tag{117}$$
$$I_7 = D_8 = 2 \tag{118}$$
$$I_8 = 0 \tag{119}$$
$$\tag{120}$$

b) Vi huskjer at sikkerhetslager er et minimumslager som aldri benyttes. Det vil med andre ord alltid bli overlagring.

At vi har en tvungen overlagring til hver måned, er i strid med Wagner-Withins første observasjon[11], som sier at:

"Det er aldri optimalt å overlagre til en periode med produksjon"

c) Vi skal sjekke om problemet hvor vi øker etterspørselen med en enhet i hver periode, har samme optimale produksjonsperioder.[12]

Vi kunne nå ha beregnet Wagner-Withins algoritme på nytt, med en ekstra enhet (100 000 liter) etterspørsel i hver periode. Dette er unødvendig arbeid, da vi kun trenger å sjekke løsningen fra oppgave 4a) for de periodene hvor vi faktisk har overlagring.[13]

Siden vi har kun overlagring fra måned 1 til måned 2, og overlagring fra måned 6 til måned 7 og 8 hhv., trenger vi kun å sjekke subproblemene P2 og P8:

[11] Når man får en oppgave om å begrunne hvorvidt Wagner-Withins algoritme er gyldig eller ikke, betyr det i realiteten at man skal sjekke om de fire observasjonene som Wagner-Within algoritmen er bygd på, er oppfylt.

[12] En produksjonsperiode, er en periode hvor produksjon forekommer. Dvs. vi skal sjekke om Y-variablene er de samme.

[13] Siden når vi ikke har ovelagring, kan vi øke etterspørselen uten at kostnadene øker.

$\underline{P_2}$: (subproblem med de to første periode)

$$\underline{C_2^*} = \min\Big[(\textit{siste bestilling i 1. periode}) , (\textit{siste bestilling i 2. periode})\Big] \tag{121}$$

$$= \min\Big[s + h \cdot D_2 + h \cdot 1 , s + C_1^*\Big] \tag{122}$$

$$= \min\Big[100 + 8 \cdot 8 + 8 , 100 + 100\Big] \tag{123}$$

$$= \min\Big[\underline{172} , 200\Big] \tag{124}$$

$$= \underline{172} \tag{125}$$

Som vi ser, er fremdeles siste bestilling i måned 1 optimalt. Vi fikk en kostnadsøkning på 8.

$\underline{P_8\text{: (det fulle problemet)}}$

$$C_8^* = \min[\ (s.b.6) , (s.b.7), (s.b.8)]$$

$$= \min[(C_5^* + h \cdot D_7 + h \cdot 1 + 2 \cdot h \cdot D_8 + 2 \cdot h \cdot 1), (C_6^* + s + h \cdot D_8 + h \cdot 1), (C_7^* + s)]$$

$$= \min[(604 + 2 \cdot 8 \cdot 2 + 8 + 2 \cdot 8, (664 + 8 \cdot 2 + 8), (604 + 100)]$$

$$= \min[\underline{636 + 24}, 680 + 8, 704]$$

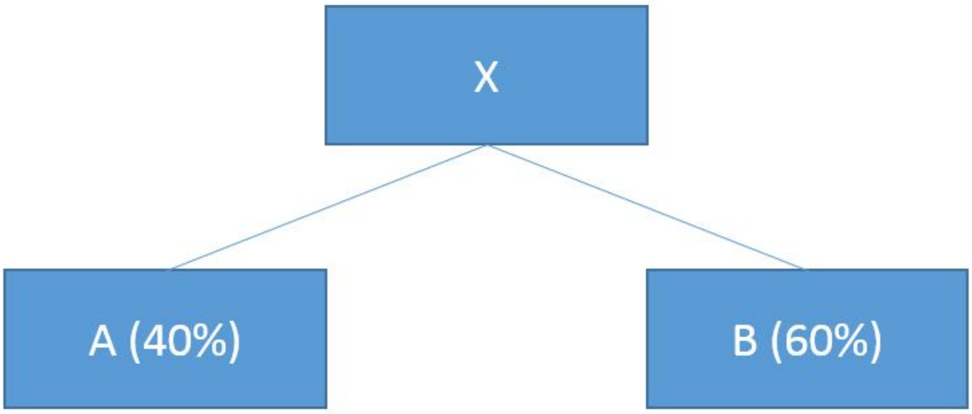
$$= \min[\underline{660}, 688, 704]$$

$$= 660$$

Som vi ser, er fremdeles siste bestilling i måned 6 optimalt. Vi fikk en kostnadsøkning på 24. Totalt økte kostnaden med 8+24 =32. Dvs Ny optimal kostnad er $\underline{\underline{C_{10111100} = 668}}$.

5) (MRP)

a) BOM-strukturen til komponent X er gitt ved figur **??**:



Figur 2: BOM-strukturen til komponent X

b) Vi skal regne ut etterspørselen av komponenet X fra masterplanen til Drygolin Ultimat. Det er to ting som er viktig å huske:

- Masterplan er lagerfiksert - dvs. MPS viser når produktet skal være på lager, mens MRP-planen er bestillingsfiksert - dvs planlagt produksjon viser når produktet bestilles. Vi må derfor forskyve masterplanen en ke frem i tid (ledetiden), for å få etterspørselen av X.
- Komponent X utgjør 30% av Drygolin Ultimat, så vi må multiplisere eterspørselen fra masterplanen med 0.3.

Vi får dermed følgende avhengig etterspørsel (avrundet til nærmeste heltall):

Måned	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Etterspørsel komponent X	0	4	5	7	11	0	0	0

c, d og e)

Uke	**Init**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Komponent X									
Bruttobehov		0	4	5	7	11	0	0	0
Planlagt mottak			24						
Lager			20	15	8	21	21	21	21
Nettobehov						3			
Planlagt ordre				24					
Komponent A									
Bruttobehov				9.6					
Planlagt mottak									
Sikkerhetslager	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Lager	15	15	15	5.4	5.4	5.4	5.4	5.4	5.4
Nettobehov									
Planlagt ordre									
Komponent B									
Bruttobehov				14.4					
Planlagt mottak									
Sikkerhetslager	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Lager	12	12	12	37.6	37.6	37.6	37.6	37.6	37.6
Nettobehov				2.4					
Planlagt ordre			40						

Kommentarer:

- Bruttobehovet for komponent A er beregnet fra planlagt ordre for komponent X: $0.4 \cdot 24 = 9.6$
- Det initielle lageret 20 for komponent A er splittet i sikkerhetslageret 5 og lager 15
- Bruttobehovet for komponent B er beregnet fra planlagt ordre for komponent X: $0.6 \cdot 24 = 14.4$
- Det initielle lageret 22 for komponent B er splittet i sikkerhetslageret 10 og lager 12

Hovedeksamen 2016

LØSNING: Hovedeksamen 22. mai 2015

"*SCM200 Lager -og Produksjonsstyring*", vår 2015

Oppgave 1: (prognostisering)

a) Vi skal velge et fornuftig måltall, som vi skal benytte for å bestemme hvilken av glattingsparametrene θ_1 og θ_2 vi skal benytte.

For å sammenligne to prognoser, er MSE, dvs "Mean Square Error" mest hensiktismessig å bruke. Årsaken er at MSE måler avstanden mellom observasjonene og prognosene.

vi velger den metoden som gir lavest MSE:[1]

$$MSE_{\theta_1} = \frac{1}{T-s+2}\sum_{t=s}^{T} E_t^2 = \frac{1}{11}\sum_{t=2}^{11} E_t^2 \tag{1}$$

$$= \frac{1}{11}\left(1^2 + 2.8^2 + 4.4^2 + 2.1^2 + 0.4^2 + 1.1^2 + 2.2^2 + 0.6^2 + 2.1^2 + 0.6^2 + 0.9^2\right) \tag{2}$$

$$= 4.11 \tag{3}$$

$$MSE_{\theta_2} = \frac{1}{T-s+2}\sum_{t=s}^{T} E_t^2 = \frac{1}{11}\sum_{t=2}^{11} E_t^2 \tag{4}$$

$$= \frac{1}{11}\left(1^2 + 2.2^2 + 3.2^2 + 0.4^2 + 0.3^2 + 1.3^2 + 3^2 + 1.4^2 + 0.9^2 + 0.3^2 + 0.8^2\right) \tag{5}$$

$$= 2.78 \tag{6}$$

Siden MSE_{θ_2} er lavest, velger vi derfor θ_2.

[1] Legg merke til at vi har $T = 12$ antall perioder og vi har prognoser fra periode $s = 2$.

b) Siden vi får oppgitt at prognosen ble 4.4 ved bruk av glattingsparameter θ_2, har vi at spesielt at:

$$F_{13} = 4.4 \tag{7}$$

I tillegg får vi oppgitt at siste observasjon er

$$X_{12} = 5 \tag{8}$$

Vi har fra formelen for eksponensiell glatting at:

$$F_{13} = \theta_2 F_{12} + (1 - \theta_2) X_{12} \tag{9}$$

Problemet her er at vi hveken kjenner θ_2 eller F_{12}. Vi har med andre ord to ukjente.

Vi trenger med andre ord en ekstra likning, slik at vi kan eliminere F_{12}. Vi har en ekstra informasjon dog: feilen E_{12} som ble gjort i periode 12:

$$E_{12} = X_{12} - F_{12} \tag{10}$$

eller ekvivalent

$$F_{12} = X_{12} - E_{12} = 5 - 0.8 = 4.2 \tag{11}$$

Vi løser dermed likning (**??**) med hensyn på θ_2:

$$F_{13} = \theta_2 F_{12} + (1-\theta_2)X_{12} \tag{12}$$
$$\Updownarrow \tag{13}$$
$$F_{13} = \theta_2 F_{12} + X_{12} - \theta_2 X_{12}$$
$$\Updownarrow \tag{14}$$
$$F_{13} = \theta_2(F_{12} - X_{12}) + X_{12}$$
$$\Updownarrow \tag{15}$$
$$\theta_2(F_{12} - X_{12}) = X_{12} - F_{13}$$
$$\Updownarrow \tag{16}$$
$$\theta_2 = \frac{X_{12} - F_{13}}{F_{12} - X_{12}}$$
$$\Updownarrow \tag{17}$$
$$\theta_2 = \frac{5 - 4.4}{5 - 4.2)}$$
$$\Updownarrow \tag{18}$$
$$\underline{\underline{\theta_2}} = 0.75 \approx \underline{\underline{0.8}}$$

c) Siden vi har gitt at glattingsparameteren er $\theta = 0.8$, beregner vi prognosene frem til måned 4 rekursivt:

$$F_{13} = 4.4 \tag{19}$$

$$F_{14} = \theta F_1 3 + (1-\theta)X_{13} = 0.8 \cdot 4.4 + 0.2 \cdot 7 = 4.91 \tag{20}$$

$$F_{15} = \theta F_1 4 + (1-\theta)X_{14} = 0.8 \cdot 4.91 + 0.2 \cdot 6 = 5.13 \tag{21}$$

$$F_{16} = \theta F_1 5 + (1-\theta)X_{15} = 0.8 \cdot 5.13 + 0.2 \cdot 4 = 4.9 \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

<u>Prognosen for måned 4 i 2016 er gitt ved $F_{16} = 4.9$.</u>

2) (aggregert planlegging)

a) Avdeling 1 har to skift hvor hvert skift gir 960 produksjonstimer. Totalt har avdelingen dermed 960+960 = 1920 timer produksjonstimer.

I tillegg kan avdeling 1 benytte seg av maksimalt 300 timer overtidsproduksjon hver måned.

Hver måned har avdelingen dermed totalt 1920+300 = 2220 timer tilgjengelig til produksjon.

Kapasiteten ved avdeling 1 må minst oppfylle (for hver måned):

$$\text{timer brukt} \leq \text{timer tilgjengelig} \tag{24}$$

I tillegg til å sjekke om kapasitetsføringen over er oppfylt, må vi bokføre hvor mange timer vi har til overs i hver måned. Disse timene akkumuleres til neste periode som representerer mulighet for overlagring til påfølgende måneder med kapasitetssprekk.

Vi sjekker at kapasiteten er oppfylt for avdeling 1 frem til måned 8:

Avdeling 1:

Husk at "timer brukt" er lik summen av etterspørsel*bearbeidingstid for familie 1 og familie 2:

Måned	**Timer behov**	**Tilgjengelige timer**	**Timer til overs**
1	$30 \cdot 15 + 10 \cdot 26 = 710$	2220	1510
2	$25 \cdot 15 + 20 \cdot 26 = 895$	2220	2835
3	$40 \cdot 15 + 30 \cdot 26 = 1380$	2220	3675
4	$35 \cdot 15 + 60 \cdot 26 = 2085$	2220	3810
5	$20 \cdot 15 + 80 \cdot 26 = 2380$	2220	3650
6	$50 \cdot 15 + 100 \cdot 26 = 3350$	2220	2520
7	$45 \cdot 15 + 70 \cdot 26 = 2420$	2220	2320
8	$45 \cdot 15 + 50 \cdot 26 = 1975$	2220	2565

Legg merke til at kolonnen "timer til overs" akkumuleres fra måneden før (lager).

Som vi ser fra tabellen har vi ingen måneder med kapasitetssprekk.

b) Siden denne modellen er nokså stor, må vi benytte indeksnotasjon. Vi har tre indekser for dette problemet:

- produktfamiliene, som indekseres ved $i = 1, 2, 3, 4$, (interør, utendørs, båt, fabrikk)
- avdelingene, som indekseres ved $j = 1, 2$.
- månedene, som indekseres ved $t = 1, 2, \ldots, 12$.

$$\begin{aligned}
I_{i0} &= \text{startlager inn til uke 1 for familie } i && (25)\\
I_{i12} &= \text{sluttlager i uke 12 for familie } i && (26)\\
D_{it} &= \text{etterspørsel for familie } i \text{ i måned } t && (27)\\
h_{it} &= \text{overlagringskostnad per 100 000 liter pr måned for familie } i \text{ fra uke } t && (28)\\
s_{i} &= \text{setupkostnad for familie } i && (29)\\
r_{i} &= \text{bearbeidingstid for familie } i && (30)\\
R_j^s &= \text{antall produksjonstimer pr skift på avdeling } j && (31)\\
N_j^s &= \text{antall skift på avdeling } j && (32)\\
O_j^m &= \text{maksimalt antall overtidstimer tilgjengelig ved avdeling } j && (33)\\
C_j^s &= \text{månedslig kostnad per skift ved avdeling } j && (34)\\
C_j^o &= \text{kostnad pr overtidstime (utenom skift) ved avdeling } j && (35)
\end{aligned}$$

Vi har ikke oppgitt tallverdiene på C_1^s, C_2^s, C_1^o og C_2^o så disse må vi presisere:

$$C_1^s = 960 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 1000 = 960 \cdot 20000 \quad (36)$$
$$C_2^s = 480 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1000 = 480 \cdot 10000 \quad (37)$$
$$C_1^o = 960 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 1800 = 960 \cdot 36000 \quad (38)$$
$$C_2^o = 480 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1800 = 480 \cdot 18000 \quad (39)$$

c) Vi har tre typer beslutninger i oppgaven:

- Produksjonsmengde - hvor mange enheter produsert (i 100 000 liter)
- Overlagring - hvor mange enheter overlagret (i 100 000 liter)
- Overtid - hvor mange overtidstimer brukt

Produksjonsmengde:

$$X_{it} = \text{antall enheter produsert av familie } i \text{ i måned } t \tag{40}$$

Overlagring:

$$I_{it} = \text{antall enheter overlagret av familie } i \text{ fra måned } t \text{ til } t+1 \tag{41}$$

Overtid:

Antall overtidstimer per avdeling er siste type besluting:

$$O_{jt} = \text{antall overtidstimer brukt ved avdeling } j \text{ i måned } t \tag{42}$$

$$\tag{43}$$

e) Målfunksjonen består av totale lager- og overtidskostnader:[2]

$$C = (\text{totale lagerkostnader}) + (\text{totale overtidskostnader}) \tag{44}$$

$$= \sum_{i=1}^{4}\sum_{t=1}^{12} h_i I_{it} + \sum_{j=1}^{2}\sum_{t=1}^{12} C_j^o O_{jt} \tag{45}$$

f) Vi identifiserer hvilke føringer vi har:

- Lagerbalanse
- Produksjonskapasitet
- Overtidskapasitet

Lagerbalanse:

$$I_{it-1} + X_{it} - D_{it} = I_{ti}, \qquad \text{for alle } i \text{ og } t \tag{46}$$

Produksjonskapasitet:

$$(\text{antall timer brukt}) \leq (\text{antall timer tilgjengelig}) \tag{47}$$

$$(\text{ant. timer brukt} \leq (\text{ant. timer pr skift} \cdot (\text{antall skift}) + \text{ant overtidstimer} \tag{48}$$

$$r_i X_{it} \leq R_j^s N_j + O_{jt} \tag{49}$$

[2] Vanlige produksjonskostnader (skift) tas ikke med i målfunksjonen siden denne kostnaden er gitt.

Maks antall overtidstimer:

$$O_{jt} \leq O_j^m \tag{50}$$

$$\tag{51}$$

g) Vi skal utvide modellen slik at beslutningen om hvorvidt vi skal benytte et tredje skift eller ikke på avdeling 1 er inkludert.

Nye data:

Ingen nye data.

Nye variabler:

Vi må inkludere hvorvidt et tredje skift skal benyttes på avdeling 1 eller ikke. Dette er en ja/nei beslutning:

$$Y_{1t} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{dersom vi bruker et tredje skift på avdeling 1 månd } t \\ 0 & , \quad \text{hvis ikke} \end{cases}$$

Ny målfunksjon:

Vi må inkludere kostnaden for det det tredje skiftet:

$$C' = C + \sum_{t=1}^{12} C_1^s Y_t \tag{52}$$

Her er C kostnadsfunksjonen fra likning (**??**).

Nye føringer:

Vi må først opdatere produksjonskapasitetsføringen

$$r_i X_{it} \leq R_j^s N_j + O_{jt} + R_j^s Y_{1t} \tag{53}$$

Vi har også en logisk føring mellom det tredje skiftet og mulighet for overtidstimer på avdeling 1:

$$\text{Hvis } Y_{1t} = 0, \text{så må } O_{1t} = 0 \tag{54}$$

På matematisk form:

$$O_{1t}(1 - Y_{1t}) = 0 \tag{55}$$

Eller på lineær form:

$$O_{1t} \leq M Y_{1t} \tag{56}$$

hvor $M = O_1^m$.

3) (EOQ)

a)

Denne oppgaven handler om å finne de nødvendige dataene for å beregne EOQ-størrelsene for de tre SENS-produktene.

Vi har at total etterspørsel for fabrikkmaltfamilien er $D_4 = 32$. I oppgaven får vi oppgitt at SENS-merket har konstant aggregert ukentlig etterspørsel lik 4:

$$D_{\text{SENS}} = 4 \qquad \text{(i 100 000 liter pr. uke)} \tag{57}$$

Vi definerer følgende indekser:

- $i = F, T, G$, representerer Forberedelsesprdukt, Toppstrøk og Grunning hhv. (SENS).

Vi bruker aggregeringsdata oppgitt i oppgaven og får:

$$\underline{\underline{D_F}} = 0.2 \cdot D_{\text{SENS}} = 0.2 \cdot 4 = \underline{\underline{0.8}} \qquad \text{(i 100 000 liter pr. uke)} \tag{58}$$

$$\underline{\underline{D_T}} = 0.5 \cdot D_{\text{SENS}} = 0.5 \cdot 4 = \underline{\underline{2}} \qquad \text{(i 100 000 liter pr. uke)} \tag{59}$$

$$\underline{\underline{D_G}} = 0.3 \cdot D_{\text{SENS}} = 0.3 \cdot 4 = \underline{\underline{1.2}} \qquad \text{(i 100 000 liter pr. uke)} \tag{60}$$

Vi skal videre beregne ukentlige enhets lagerkostnader. I dette tilfellet er det kostnaden for å overlagre 100 000 liter i en uke.[3]

Lagerkostnaden pr 100 000 liter pr uke, er kun gitt ved kapitalkostnaden, dvs rentekostnaden som vi får fra produktets salgsverdi. siden rentesatsen, $r = 0.1$ er årlig, må vi dividere med 52 uker, for å få ukentlig lagerkostnad. Siden salgsverdien P_i er pr liter, må vi i tillegg multiplisere med 100 000, for å få lagerkostnad pr 100 000 liter:

$$\underline{\underline{h_F}} = \frac{P_F r}{52} \cdot 100000 = \frac{40 \cdot 0.1}{52} \cdot 100000 = \underline{\underline{7692}} \qquad \text{(pr 100 000 liter pr. uke)} \tag{61}$$

$$\underline{\underline{h_T}} = \frac{P_T r}{52} \cdot 100000 = \frac{60 \cdot 0.1}{52} \cdot 100000 = \underline{\underline{11538}} \qquad \text{(pr 100 000 liter pr. uke)} \tag{62}$$

$$\underline{\underline{h_G}} = \frac{P_G r}{52} \cdot 100000 = \frac{50 \cdot 0.1}{52} \cdot 100000 = \underline{\underline{9615}} \qquad \text{(pr 100 000 liter pr. uke)} \tag{63}$$

Til slutt beregner vi enkelt setupkostnaden ved å multiplisere antall omstillingstimer med den regulære timekostnaden $C_R = 10000$ samt legge til fastkostnaden:

$$\underline{\underline{S_F}} = 3 \cdot C_R + 5000 = 2 \cdot 10000 + 5000 = 25000 \qquad \text{(kroner pr setup)} \tag{64}$$

$$\underline{\underline{S_T}} = 5 \cdot C_R + 5000 = 4 \cdot 10000 + 5000 = 45000 \qquad \text{(kroner pr setup)} \tag{65}$$

$$\underline{\underline{S_G}} = 4 \cdot C_R + 5000 = 3 \cdot 10000 + 5000 = 35000 \qquad \text{(kroner pr setup)} \tag{66}$$

[3] Oppgaveteksten er utydelig når det gjelder denne oppgaven. På eksamen gis det enten beskjed om det hvis det oppdages under eksamen, hvis ikke, vil oppgaven gi korrekt dersom dere skulle tolke oppgaven feil.

b) Vi skal beregne optimale ordrestørrelser (EOQ) for de tre SENS-produktene samt totale kostnader.

Siden vi har alle de nødvendige dataene fra oppgave 3a), kan vi sette direkte inn i Wilsons formel:

$$\underline{\underline{X_F^*}} = \sqrt{\frac{2D_F S_F}{H_F}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.8 \cdot 25000}{7692}} = \underline{\underline{2.5}} \qquad \text{(i 100 000 liter)} \tag{67}$$

$$\underline{\underline{X_T^*}} = \sqrt{\frac{2D_T S_T}{H_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 45000}{11538}} = \underline{\underline{4.16}} \qquad \text{(i 100 000 liter)} \tag{68}$$

$$\underline{\underline{X_G^*}} = \sqrt{\frac{2D_G S_G}{H_G}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.2 \cdot 35000}{9615}} = \underline{\underline{2.96}} \qquad \text{(i 100 000 liter)} \tag{69}$$

Totale optimale kostnader er lik summen av kostnadene for de tre SENS-produktene:

$$\underline{\underline{C^*}} = C_F^* + C_T^* + C_G^* \tag{70}$$

$$= \left(\frac{S_F D_F}{X_F^*} + \frac{H_F X_F^*}{2}\right) + \left(\frac{S_T D_T}{X_T^*} + \frac{H_T X_T^*}{2}\right) + \left(\frac{S_G D_G}{X_G^*} + \frac{H_G X_G^*}{2}\right) \tag{71}$$

$$= H_F X_F^* + H_T X_T^* + H_G X_G^* \tag{72}$$

$$= 7692 \cdot 2.28 + 11538 \cdot 3.95 + 9615 \cdot 2.96 \tag{73}$$

$$= \underline{\underline{91534}} \tag{74}$$

Steg (**??**) er gyldig fordi setupkostnaden og lagerkostnaden er lik for EOQ-verdien.[4]

[4]Dette er altså kun gyldig for de optimale ordrestørrelsene. Grunnen til at vi skriver dette opp, er fordi utregningene blir enklere.

c) Vi skal regne ut omløpstidene for de tre SENS-produktene:[5]

$$\underline{\underline{O_F}} = \frac{X_F^*}{D_F} = \frac{2.5}{0.8} = \underline{\underline{2.9}} \qquad \text{(i antall uker)} \tag{75}$$

$$\underline{\underline{O_T}} = \frac{X_T^*}{D_T} = \frac{4.16}{2} = \underline{\underline{2.0}} \qquad \text{(i antall uker)} \tag{76}$$

$$\underline{\underline{O_G}} = \frac{X_F^*}{D_F} = \frac{2.96}{1.2} = \underline{\underline{2.5}} \qquad \text{(i antall uker)} \tag{77}$$

d) Vi regner først ut justert optimal ordrestørrelse:

$$X_T^* = \sqrt{\frac{2D_T S_T}{H_T(1-\frac{D_T}{P_T})}} = \sqrt{\frac{2\cdot 2\cdot 45000}{11538(1-\frac{2}{3})}} = 6.84 \qquad \text{(i 100 000 liter)} \tag{78}$$

Omløpstiden $T = T_1 + T_2$ består av to ledd: T_1 og T_2, hvor:

$$T_1 = \frac{X_T^*}{P_T - D_T} = \frac{6.84}{3-2} = 6.84 \qquad \text{(tiden det tar å fylle opp lageret til } X_T^* \text{)} \tag{79}$$

$$T_2 = \frac{X_T^*}{D_T} = \frac{6.84}{2} = 3.42 \qquad \text{(tiden det tar å tømme lageret)} \tag{80}$$

Den totale omløpstiden blir dermed:

$$\underline{\underline{T}} = T_1 + T_2 = 6.84 + 3.42 = \underline{\underline{10.26}} \qquad \text{(i antall uker)} \tag{81}$$

[5] Omløpstiden er syklustiden, dvs tiden fra lageret fylles til det er tomt.

4) (Wagner-Within)

a) Vi skal finne optimal produksjonsplan ved hjelp av Wagner-Within algoritmen.

Data:[6]

$$D_t = \text{etterspørsel måned } t \text{ av Drygolin Ultimat} \tag{82}$$

$$s = \text{setupkostnaden for Drygolin Ultimat} = 100000 \tag{83}$$

$$h = \text{enhetslig overlagringskostnad for Drygolin Ultimat (pr 100 000 liter) pr uke} = 5000 \tag{84}$$

Variabler:

$$X_t = \text{produksjonsmengde i uke } t \tag{85}$$

$$I_t = \text{mengde overlagret fra uke } t \text{ til } t+1 \tag{86}$$

$$Y_t = 0 \text{ eller } 1 \text{ for hvorvidt produksjon finner sted i uke } t \tag{87}$$

[6] Det er ikke nødvendig å skrive opp disse definisjonene på eksamen. Data og variabler er underforståtte for Wagner-Within algoritmen. Vi har kun inkludert disse her for helheltens skyld.

Vi starter som vanlig med delproblemet med kun en periode:[7]

$\underline{P_1}$: (subproblem med kun første periode)

Siden vi har initielt lager på 4, er det optimalt å benytte dette lageret for å oppfylle etterspørselen i uke 1. Vi har dermed ingen setup i første periode, dvs $Y_1 = 0$:

$$\underline{C_1^*} \ = \ s \cdot Y_1 \ = \ \underline{100} \cdot 0 = 0 \tag{88}$$

$\underline{P_2}$: (subproblem med de to første periode)

$$\underline{C_2^*} = \min \Big[(\textit{siste bestilling i 1. periode}) \ , \ (\textit{siste bestilling i 2. periode}) \Big] \tag{89}$$

$$= \min \Big[s + hD_2 \ , \ s + h(I_0 - D_1) + C_1^* \Big] \tag{90}$$

$$= \min \Big[100 + 5 \cdot 5 \ , \ 100 + 5 \cdot (4 - 2) + 0 \Big] \tag{91}$$

$$= \min \Big[125 \ , \ \underline{110} \Big] \tag{92}$$

$$= \underline{110} \tag{93}$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er C_{01}.

Horisontteoremet sier da at vi kan fryse uke 1, fra videre beregninger.

Legg merke til ekstrakostnaden som kommer i uke 2 pga. at det resterende initielle lageret overlagres (i blått).

[7] Vi skriver alle kostnadstall i antall 1000 for oversiktens skyld. Så setupkostnaden blir 100 mens lagerkostnaden blir 8. Dette kan dere også gjøre til eksamen, så lenge dere bemerker at dere gjør det.

$\underline{P_3}$: (subproblem med de tre første periodene)

Vi starter beregningene fra uke 2:

$$\underline{C_3^*} = \min\left[\ \textit{(s.b.2)},\ \textit{(s.b.3)}\right] \tag{94}$$

$$= \min\left[\ (s + hD_3 + C_1^*)\ ,\ (s + C_2^*)\right] \tag{95}$$

$$= \min\left[\ (110 + 5 \cdot 10)\ ,\ (100 + 110)\right] \tag{96}$$

$$= \min\left[\ \underline{160}\ ,\ 210\right] \tag{97}$$

$$= \underline{160} \tag{98}$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte uke 1 fra videre beregninger, noe vi allerede har gjort. [8]

[8] Legg merke til at vi benytter oss av at vi allerede har beregnet en del av uttrykkene i forrige delproblem.

$\underline{P_4\text{:}}$ (subproblem med de tre fire periodene)

Vi starter beregningene fra uke 2:

$$
\begin{aligned}
C_4^* &= \min[\ \textit{(s.b.2)},\ \textit{(s.b.3)}\ ,\ \textit{(s.b.4)}] \\
&= \min[\ (s + hD_3 + 2hD_4 + C_1^*)\ , (s + hD_4 + C_2^*),\ (s + C_3^*)] \\
&= \min[(160 + 2 \cdot 5 \cdot 8),\ (210 + 5 \cdot 8),\ (100 + 160)] \\
&= \min[\underline{240},\ 250,\ 260] \\
&= 240
\end{aligned}
$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte uke 1 fra videre beregninger, noe vi allerede har gjort.

$\underline{P_5:}$

Vi starter beregningene fra uke 2:

$$
\begin{aligned}
C_5^* &= \min[\ \textit{(s.b.2)},\ \textit{(s.b.3)}\ ,\ \textit{(s.b.4)}\ ,\ \textit{(s.b.5)}] \\
&= \min[\ (s + hD_3 + 2h \cdot D_4 + 3hD_5 + C_1^*)\ , (s + hD_4 + 2h \cdot D_5 + C_2^*), \\
&\qquad (s + hD_5 + C_3^*),\ (s + C_4^*)] \\
&= \min[(240 + 3 \cdot 5 \cdot 20),\ (250 + 2 \cdot 5 \cdot 20),\ (260 + 5 \cdot 20),\ (240 + 100)] \\
&= \min[540,\ 450,\ 360,\ \underline{340}] \\
&= 340
\end{aligned}
$$

Horisontteoremet sier da at vi kan fryse uke 2, 3 og 4.

$\underline{P_6:}$

Vi starter beregningene fra uke 5:

$$
\begin{aligned}
C_6^* &= \min[\ \textit{(s.b.5)}\ ,\ \ \textit{(s.b.6)}] \\
&= \min[(s + hD_6 + C_4^*),\ \ (s + C_5^*)] \\
&= \min[(340 + 5 \cdot 8,\ \ (340 + 100)] \\
&= \min[\underline{380},\ \ 440] \\
&= 380
\end{aligned}
$$

Horisontteoremet gir ikke noe ekstra .

$\underline{P_7\text{:}}$

Vi starter beregningene fra uke 5:

$$
\begin{aligned}
C_7^* &= \min[\ \textit{(s.b.5)}\ ,\ \textit{(s.b.6)}\ ,\ \textit{(s.b.7)}] \\
&= \min[(C_4^* + s + hD_6 + 2hD_7),\ (C_5^* + s + hD_7),\ (C_6^* + s)] \\
&= \min[(380 + 2 \cdot 5 \cdot 6,\ (440 + 5 \cdot 6),\ (380 + 100)] \\
&= \min[\underline{440},\ 470,\ 480] \\
&= 440
\end{aligned}
$$

Horisontteoremet gir ikke noe ekstra .

$\underline{P_8\text{: (det fulle problemet)}}$

Vi starter beregningene fra 5. måned.

$$C_8^* = \min[\ (s.b.5)\ ,(s.b.6)\ ,\ \ (s.b.7),\ \ (s.b.8)]$$

$$= \min[(C_4^* + s + hD_6 + 2hD_7 + 3hD_8),\ (C_5^* + s + hD_7 + 2hD_8),$$

$$(C_6^* + s + hD_8),\ (C_7^* + s)]$$

$$= \min[(440 + 3 \cdot 5 \cdot 5),\ (470 + 2 \cdot 5 \cdot 5,\ (480 + 5 \cdot 5),\ (440 + 100)]$$

$$= \min[515,\ 520,\ \underline{\underline{505}},\ 540]$$

$$= 505$$

Vi har nå funnet optimal kostnad. Vi finner optimale produksjonsperioder $C_{xxxxxxxx}$ ved å starte bakfra og jobbe oss frem til periode 1:

$$C_{xxxxxxxx} = C_{xxxxxx10} \qquad \text{(siste bestilling i uke 7)} \tag{99}$$

$$C_{xxxx1010} = C_{xxxx1100} \qquad \text{(siste bestilling i uke 5)} \tag{100}$$

$$C_{x1001100} = C_{xxx11100} \qquad \text{(siste bestilling i uke 2)} \tag{101}$$

$$C_{x1001100} = C_{01001100} \qquad \text{(siste bestilling i uke 2)} \tag{102}$$

Vi har altså $\underline{\underline{C_{01001100} = 505000}}$. videre må vi finne optimale produksjonsmengder og lagermegnder.

Produksjonsmengder: (finnes ved hjelp av "dominante produksjonsplaner")

$$
\begin{align}
X_1 &= 0 \tag{103}\\
X_2 &= D_2 + D_3 + D_4 - (I_1 - D_1) = 5 + 10 + 8 - (4 - 2) = 21 \tag{104}\\
X_3 &= 0 \tag{105}\\
X_4 &= 0 \tag{106}\\
X_5 &= D_5 + D_6 = 20 + 8 = 28 \tag{107}\\
X_6 &= 0 \tag{108}\\
X_7 &= D_7 + D_8 = 6 + 5 = 11 \tag{109}\\
X_8 &= 0 \tag{110}\\
& \tag{111}
\end{align}
$$

Lagermengder:

$$
\begin{align}
I_1 &= I_0 - D_1 = 4 - 2 = 2 \tag{112}\\
I_2 &= D_3 + D_4 = 10 + 8 = 18 \tag{113}\\
I_3 &= D_4 = 8 \tag{114}\\
I_4 &= 0 \tag{115}\\
I_5 &= D_6 = 8 \tag{116}\\
I_6 &= 0 \tag{117}\\
I_7 &= D_8 + I_8 = 2 + 3 = 5 \tag{118}\\
& \tag{119}
\end{align}
$$

b) La den nye ordren være ukjent variabel x, dvs vi øker etterspørselen i uke 8 med x enheter.

Vi kan skrive:

$$D_8^{ny} = D_8^{gammel} + x = 2 + x \tag{120}$$

For å finne den verdien på x slik at produksjonen flyttes fra uke 7 til uke 8, må vi se på delproblem P8, hvor vi inkluderer den nye ordren x:

$$\begin{aligned}
C_8^* &= \min[\ (s.b.5)\ ,(s.b.6)\ ,\ (s.b.7),\ (s.b.8)] \\
&= \min[(C_4^* + s + hD_6 + 2hD_7 + 3hD_8 + 3hx),\ (C_5^* + s + hD_7 + 2hD_8 + 2hx), \\
&\qquad (C_6^* + s + hD_8 + hx),\ (C_7^* + s)] \\
&= \min[515 + 15x,\ 520 + 10x, 505 + 5x,\ 540]
\end{aligned}$$

Vi ser at siste bestilling i uke 7 blir større enn siste bestilling i uke 8 når:

$$505 + 5x = 540 \tag{121}$$

$$\Updownarrow$$

$$5x = 540 - 505 = 35 \tag{122}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{35}{5} = 7 \tag{123}$$

Konklusjon: Produksjonen i uke 7 flyttes til uke 8 dersom den nye ordren er større enn $\underline{\underline{7}}$.

c) Med en maksimal produksjonsrate på 2.5 millioner liter drygolin Ultimat i uken, må vi sjekke om vi har nok kapasitet til å gjennomføre planen fra oppgave 3.a.

vi har tre produksjonsperioder:

$$X_2 = 21 \tag{124}$$
$$X_5 = 28 \tag{125}$$
$$X_7 = 11 \tag{126}$$

Siden en produksjonsrate på 2.5 millioner liter i uken, svarer til 25 eneheter per uke[9], ser vi umiddelbart at vi har en sprekk i uke 5 på 28-25=3 enheter.

Vi kan dermed konkludere med at løsningen fra Wagner-Within algoritmen ikke er gyldig når vi inkluderer produksjonskapasiteten.

På grunn av produksjonskapasiteten vil Wagner-Withins teorem om "Dominante produksjonsplaner" være brutt, siden man må tillate å splitte produksjonen av en etterspørsel i flere produksjonsperiode.

Ny dominant produksjonsplan finnes ved å forsøke å løse sprekken i uke 5. Vi husker at uke 5 produserer både for uke 5 og for uke 6, dvs $X = D_5 + D_6$.

Billigste måte å løse sprekken på under sideinformasjonen at det finnes en dominant plan, er å kreve at produksjonen av D_6 flyttes til uke 6, dvs:

$$X_5 = D_5 = 20 \tag{127}$$
$$I_5 = 0 \tag{128}$$
$$Y_6 = 1 \tag{129}$$

Vi må dermed finne de resterende variablene X_6,X_7,X_8, Y_7, Y_8, I_6 og I_7, ved hjelp av Wagner-Within algoritmen, hvor vi starter med P7 hvor alle perioder frem til periode 6 er fryst:

[9] Husk at en enhet er 100 000 liter.

$\underline{P_7\text{:}}$

Vi starter beregningene fra uke 6:

$$
\begin{aligned}
C_7^* &= \min[\ (s.b.6)\ ,\ (s.b.7)] \\
&= \min[\ (C_5^* + s + hD_7),\ (C_6^* + s)] \\
&= \min[\ (440 + 5 \cdot 6),\ (440 + 100)] \\
&= \min[\ \underline{\underline{470}},\ 540] \\
&= 470
\end{aligned}
$$

Legg merke til at ny C_6^* finnes ved å ta den gamle verdien fra oppgave 4a. og legge til en setup og trekke ifra lagerkostnaden for D_6 fra uke 5 til uke 6:

$$C_6^* = 380 + 100 - 5 \cdot 8 = 440 \tag{130}$$

Horisontteoremet gir ikke noe nytt.

$\underline{P_8\text{: (det fulle problemet)}}$

Vi starter beregningene fra uke 6.

$$
\begin{aligned}
C_8^* &= \min[(s.b.6)\ ,\ (s.b.7),\ (s.b.8)] \\
&= \min[\ (C_5^* + s + hD_7 + 2hD_8),\ (C_6^* + s + hD_8),\ (C_7^* + s)] \\
&= \min[\ (470 + 2 \cdot 5 \cdot 5,\ (540 + 5 \cdot 5),\ (470 + 100)] \\
&= \min[\underline{\underline{520}},\ 565,\ 570] \\
&= 520
\end{aligned}
$$

Vi ser dermed at det er optimalt at siste produksjon er i uke 6, dvs vi får:

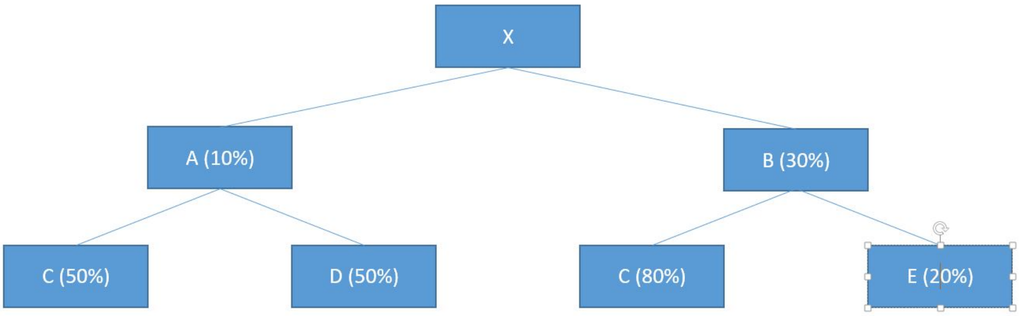
$$C^* = C_{01001100} = 520 \tag{131}$$

I tillegg har vi at:

$$
\begin{aligned}
X_6 &= D_6 + D_7 + D_8 + I_8 = 8 + 6 + 2 + 3 = 19 & (132) \\
X_7 &= 0 & (133) \\
X_8 &= 0 & (134) \\
I_6 &= D_7 + D_8 + I_8 = 6 + 2 + 3 = 11 & (135) \\
I_7 &= D_8 + I_8 = 2 + 3 = 5 & (136)
\end{aligned}
$$

5) (MRP)

a) BOM-strukturen til komponent X er gitt ved figur **??**:



Figur 1: BOM-strukturen til komponent X

b)

Uke	Init	1	2	3	4	5	6	7	8
Komponent A									
Bruttobehov			1	1.5	3		4		
Planlagt mottak									
Lager	4	4	3	1.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
Nettobehov					1.5		1.5		
Planlagt ordre				4		4			
Komponent B									
Bruttobehov			3	4.5	9		12		
Planlagt mottak		10							
Lager		10	7	2.5					
Nettobehov					6.5		12		
Planlagt ordre			6.5		12				
Komponent C									
Bruttobehov			5.2	2	9.6	2			
Planlagt mottak									
Sikkerhetslager5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Lager			4.8	2.8	3.2	1.2	1.2	1.2	1.2
Nettobehov			5.2		6.8				
Planlagt ordre		10		10					
Komponent D									
Bruttobehov				2		2			
Planlagt mottak			5						
Lager	2	2	7	5	5	3	3	3	3
Nettobehov									
Planlagt ordre									
Komponent E									
Bruttobehov			1,3		2.4				
Planlagt mottak									
Lager	1	1	0.7	1.7	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
Nettobehov			0.3		0.7	0.7			
Planlagt ordre		1	1	1					

Kommentarer:

- Bruttobehovet for komponent C er summen av planlagt ordre for A og B, tatt prosentene med i betraktning, dvs $D_C = 0.5X_A + 0.2X_B$.
- For komponent E har vi lagt inn en ekstra planlagt ordre i uke 2 for å oppfylle bruttobehovet i uke 4.

Kontinuasjonseksamen 2016

LØSNING: Kontinuasjonseksamen 6. jan 2016

"*SCM200 Lager -og Produksjonsstyring*", vår 2016

Oppgave 1: (prognostisering, 25 %)

a) Vi har fra formelen for eksponensiell glatting at:

$$\underline{\underline{F_{10}}} = \theta F_9 + (1-\theta)X_9 = 0.2 \cdot 7.63 + 0.8 \cdot 8 = \underline{\underline{7.92}} \tag{1}$$

$$\underline{\underline{F_{11}}} = \theta F_{10} + (1-\theta)X_{10} = 0.2 \cdot 7.92 + 0.8 \cdot 10 = \underline{\underline{9.58}} \tag{2}$$

$$\underline{\underline{F_{12}}} = \theta F_{11} + (1-\theta)X_{11} = 0.2 \cdot 9.58 + 0.8 \cdot 6 = \underline{\underline{6.72}} \tag{3}$$

b) Vi har fra formelen for eksponensiell glatting at:

$$\underline{\underline{F_{13}}} = \theta F_{12} + (1-\theta)X_{12} = 0.2 \cdot 6.72 + 0.8 \cdot 18 = \underline{\underline{15.7}} \tag{4}$$

Problemet med denne prognosen for 2017 er at den er kraftig overestimert pga. den høye observasjonen i desember.

Siden avdelingen har valg glattingsparameter 0.2, altså at $1 - \theta = 0.8$, så vil prognosen vektlegge siste observasjon mest.

c) Sesongjustert observasjon er oppgitt i oppgaven:

$$\tilde{X}_{12}^{i} \;=\; G_{12} \cdot X_{12}^{i} \tag{5}$$

og løser med hensyn på sesonfaktoren alene

$$\underline{G_{12}^{i} \;=\; \frac{\tilde{X}_{12}^{i}}{\overline{X}_{12}^{i}}} \tag{6}$$

Deretter bruker vi gjennomsnittet som et estimat på sesongjustert observasjon:

$$\tilde{X}_{12}^{\text{år}} = \overline{X}_{12}^{\text{år}} \tag{7}$$

som gir:

$$G_{12}^{2013} \;=\; \frac{\overline{X}_{12}^{2013}}{X_{12}^{2013}} = \frac{8.7}{15} \;=\; \underline{\underline{0.58}} \tag{8}$$

$$\underline{\underline{G_{12}^{2014}}} \;=\; \frac{\overline{X}_{12}^{2014}}{X_{14}^{2013}} = \frac{9.5}{17} \;=\; \underline{\underline{0.56}} \tag{9}$$

$$\underline{\underline{G_{12}^{2015}}} \;=\; \frac{\overline{X}_{12}^{2015}}{X_{15}^{2013}} = \frac{9.2}{18} \;=\; \underline{\underline{0.51}} \tag{10}$$

d) Vi bruker formelen for eksponensiell glatting på de estimerte sesongfaktorene (**??**)-(**??**). Vi betegner $FG_{12}^{\text{år}}$ som prognosen for sesongfaktoren for det gitte året:

$$\underline{\underline{FG_{12}^{2014}}} = G_{12}^{2013} = \underline{\underline{0.58}} \tag{11}$$

$$\underline{\underline{FG_{12}^{2015}}} = \theta FG_{12}^{2014} + (1-\theta)G_{12}^{2014} = 0.2 \cdot 0.58 + 0.8 \cdot 0.56 = \underline{\underline{0.563}} \tag{12}$$

$$\underline{\underline{FG_{12}^{2016}}} = \theta FG_{12}^{2015} + (1-\theta)G_{12}^{2015} = 0.2 \cdot 0.563 + 0.8 \cdot 0.51 = \underline{\underline{0.522}} \tag{13}$$

e) Vi må først regne ut prognosen for 2016, F^{2016}, med den justerte observasjonen for desember 2015:

$$\underline{\underline{F^{2016}}} = F_{13} = \theta F_{12} + (1-\theta)\underline{X}_{12} = 0.2 \cdot 6.72 + 0.8 \cdot 9.2 = \underline{\underline{8.7}} \tag{14}$$

Deretter må vi justere prognosen for desember 2016 ved hjelp av den estimerte sesongfaktoren FG_{12}^{2016}:

$$\underline{\underline{F_{24}}} = \frac{F_{13}}{FG_{12}^{2016}} = \frac{8.7}{0.52} = \underline{\underline{16.7}} \tag{15}$$

■

Oppgave 2: (aggregert planlegging, 25 %)

a) Siden denne modellen er nokså stor, må vi benytte indeksnotasjon. Vi har tre indekser for dette problemet:

- produktfamiliene, som indekseres ved $i = 1, 2, 3, 4$, (interør, utendørs, båt, fabrikk)
- månedene, som indekseres ved $t = 1, 2, \ldots, 12$.

$$
\begin{aligned}
I_{i0} &= \text{startlager inn til uke 1 for familie } i && (16)\\
I_{i12} &= \text{sluttlager i uke 12 for familie } i && (17)\\
D_{it} &= \text{etterspørsel for familie } i \text{ i måned } t && (18)\\
h_{it} &= \text{overlagringskostnad per 100 000 liter pr måned for familie } i \text{ fra uke } t && (19)\\
r_i &= \text{bearbeidingstid for familie } i && (20)\\
R &= \text{antall produksjonstimer pr. ansatt} && (21)\\
O_j^m &= \text{maksimalt antall overtidstimer tilgjengelig ved avdeling } j && (22)\\
C_F &= \text{permitteringskostnad pr arbeider} && (23)\\
C_H &= \text{ansettelseskostnad pr arbeider} && (24)\\
C_R &= \text{kostnaden for en regulær time} && (25)\\
W &= \text{maksimalt antall ansatte} && (26)\\
W_0 &= \text{antall ansatte ved starten av første måned} && (27)\\
W_{12}^{min} &= \text{minimum antall ansatte ved slutten av året} && (28)
\end{aligned}
$$

Vi har ikke oppgitt tallverdiene på R, C_F, C_H, C_R og W så disse må vi presisere:

$$
\begin{aligned}
R &= 90 && (29)\\
C_F &= 35000 && (30)\\
C_H &= 30000 && (31)\\
C_R &= 1000 && (32)\\
W &= 30 && (33)
\end{aligned}
$$

b) Vi har fem typer beslutninger i oppgaven:

- Produksjonsmengde - hvor mange enheter produsert (i 100 000 liter) hver måned
- Overlagring - hvor mange enheter overlagret (i 100 000 liter) fra en måned til neste
- Antall ansatte hver måned
- Antall ansatte som ansettes fra en måned til neste
- Antall ansatte som permitteres fra en måned til neste

Produksjonsmengde:

$$X_{it} = \text{antall enheter produsert av familie } i \text{ i måned } t,\ t = 1, \ldots, 12 \tag{34}$$

Overlagring:

$$I_{it} = \text{antall enheter overlagret av familie } i \text{ fra måned } t \text{ til } t+1,\ t = 1, \ldots, 11 \tag{35}$$

antall ansatte:

$$W_t = \text{antall ansatte ved måned } t,\ t = 1, \ldots, 12 \tag{36}$$

Antall ansattelser:

$$H_t = \text{antall ansattelser fra måned } t \text{ til } t+1,\ t = 1, \ldots, 12 \tag{37}$$

Antall permitteringer:

$$F_t = \text{antall permitteringer fra måned } t \text{ til } t+1,\ t = 1, \dots, 12 \tag{38}$$

c) Målfunksjonen består av følgende kostnader:

- Lagerkostnader
- Lønnskostnader
- Ansettelseskostnader
- Permitteringskostnader

$$C = (\text{totale lagerkostnader}) + (\text{totale lønnskostnader}) \tag{39}$$

$$= (\text{totale ansettelseskostnader}) + (\text{totale permitteringskostnader}) \tag{40}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \sum_{t=1}^{11} h_i I_{it} + \sum_{t=1}^{12} C_R W_t + \sum_{t=1}^{12} C_H H_t + \sum_{t=1}^{12} C_F F_t \tag{41}$$

d) Vi identifiserer hvilke føringer vi har:

- Lagerbalanse
- Ansattebalanse
- Produksjonskapasitet
- Maksimalt antall ansatte
- Minimum antall ansatte ved årets slutt

Lagerbalanse:

$$I_{it-1} + X_{it} - D_{it} = I_{ti}, \qquad \text{for alle } i \text{ og } t \tag{42}$$

Ansattebalanse:

$$W_{t-1} + H_t - F_t = W_t, \qquad \text{for alle og } t \tag{43}$$

Produksjonskapasitet:

$$\text{(antall timer brukt)} \leq \text{(antall timer tilgjengelig)} \tag{44}$$

$$\sum_{i=1}^{4} r_i X_{it} \leq RW_t \tag{45}$$

Maks antall ansatte:

$$W_t \leq W \tag{46}$$

$$\tag{47}$$

Minimum antall ansatte ved årets slutt:

$$W_{12} \geq W_{12}^{min} \tag{48}$$

e) Hvis vi benytter alle 30 ansatte, får vi en månedslig produksjonskapasitet på $30 \cdot 90 = 2700$ produksjonstimer.

Vi må bokføre hvor mange timer vi har til overs i hver måned. Disse timene akkumuleres til neste periode som representerer mulighet for overlagring til påfølgende måneder med kapasitetssprekk.

Vi sjekker at kapasiteten er oppfylt for avdelingen frem til måned 6:

Husk at produksjonsbehovet er lik summen av etterspørsel*bearbeidingstid for alle familiene. Disse var oppgitt i oppgaven:

Måned	**Timer behov**	**Tilgjengelige timer**	**Timer til overs**
1	1358	2700	1342
2	1228	2700	2814
3	2508	2700	3006
4	3263	2700	2443
5	3528	2700	1615
6	4998	2700	-683

Som vi ser fra tabellen har vi kapasitetssprekk på 683 timer i måned 6.

f) Vi skal utvide modellen slik at beslutningen om overtid er inkludert.

Nye data:

$$O^m = \text{maksimalt antall overtidstimer per ansatt} \tag{49}$$
$$C^O = \text{kostnaden for en overtidstime} \tag{50}$$

Nye variabler:

Antall overtidstimer brukt totalt hver måned:

$$O_t = \text{antall overtimer benyttet i måned } t,\ t = 1, \ldots, 12 \tag{51}$$

Ny målfunksjon:

Vi må inkludere overtidskostnaden i målfunksjonen

$$C' = C + \sum_{t=1}^{12} C^O O_t \tag{52}$$

Her er C kostnadsfunksjonen fra likning (**??**).

Nye føringer:

Vi må først opdatere produksjonskapasitetsføringen

Produksjonskapasitet:

$$\text{(antall timer brukt)} \leq \text{(antall timer tilgjengelig)} \tag{53}$$

$$\sum_{i=1}^{4} r_i X_{it} \leq RW_t + O_t/2 \tag{54}$$

for alle $t = 1, 2, \ldots, 12$.

Legg merke til at vi deler antall overtidstimer med 2 siden en overtidstime gir en halv produksjonstime.

Maksimalt antall overtidstimer pr måned:

$$O_t \leq O^m \tag{55}$$

for alle $t = 1, 2, \ldots, 12$.

g) Hvis vi i tillegg til alle 30 ansatte, benytter alle overtidstimer pr. måned, får vi en månedslig produksjonskapasitet på $30 \cdot 90 + 720/2 = 2700 + 360 = 3060$ produksjonstimer.

Vi må bokføre hvor mange timer vi har til overs i hver måned. Disse timene akkumuleres til neste periode som representerer mulighet for overlagring til påfølgende måneder med kapasitetssprekk.

Vi sjekker at kapasiteten er oppfylt for avdelingen frem til måned 6:

Husk at produksjonsbehovet er lik summen av etterspørsel*bearbeidingstid for alle familiene. Disse var oppgitt i oppgave 1e):

Måned	Timer behov	Tilgjengelige timer	Timer til overs
1	1358	3060	1702
2	1228	3060	3534
3	2508	3060	4086
4	3263	3060	3883
5	3528	3060	3415
6	4998	3060	1477

Som vi ser fra tabellen har kapasitetssprekken i måned 6 blitt fjernet.

3) (EOQ)

a) Denne oppgaven handler om å finne de nødvendige dataene for å beregne EOQ-størrelsene for Yachting NONSTOP supreme merket.

Lagerkostnaden pr 100 000 liter pr uke, er kun gitt ved kapitalkostnaden, dvs rentekostnaden som vi får fra produktets salgsverdi. siden rentesatsen, $r = 0.1$ er årlig, må vi dividere med 52 uker, for å få ukentlig lagerkostnad. Siden salgsverdien P_i er pr liter, må vi i tillegg multiplisere med 100 000, for å få lagerkostnad pr 100 000 liter:

$$\underline{\underline{h}} = \frac{Pr}{52} \cdot 100000 = \frac{80 \cdot 0.1}{52} \cdot 100000 = \underline{\underline{15384}} \qquad \text{(pr 100 000 liter pr. uke)} \tag{56}$$

$$\tag{57}$$

Setupkostnaden fås ved å multiplisere antall omstillingstimer med den regulære timekostnaden $C_R = 10000$:

$$\underline{\underline{S}} = 6 \cdot C_R = 6 \cdot 10000 = 60000 \qquad \text{(kroner pr setup)} \tag{58}$$

$$\tag{59}$$

b) Vi skal beregne optimal ordrestørrelse (EOQ) for Yachting NONSTOP supreme merket.

Siden vi har alle de nødvendige dataene fra oppgave 3a), kan vi sette direkte inn i Wilsons formel:

$$\underline{\underline{X^*}} = \sqrt{\frac{2DS}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 60000}{15384}} = \underline{\underline{2.8}} \qquad \text{(i 100 000 liter)} \tag{60}$$

$$\tag{61}$$

Totale optimale lager- og setupkostnader:

$$\underline{\underline{C^*}} = \frac{SD}{X^*} + \frac{HX^*}{2} = HX^* = 15384 \cdot 2.8 = \underline{\underline{42966}} \tag{62}$$

Husk at den totale setupkostnaden og lagerkostnaden er lik for EOQ-verdien.[1]

[1] Dette er altså kun gyldig for de optimale ordrestørrelsene. Grunnen til at vi skriver dette opp, er fordi utregningene blir enklere.

c) Vi regner ut ny justert optimal ordrestørrelse ved hjelp av den oppgitte formelen:

$$\underline{\underline{X^*(P)}} = \sqrt{\frac{2DS}{H\,(1-\frac{D}{P})}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1\cdot 60000}{15384\,(1-\frac{1}{2})}} = \underline{\underline{3.95}} \qquad \text{(i 100 000 liter)} \tag{63}$$

d) Dersom etterspørselsraten overskrider prdouksjonsraten, selger vi raskere enn vi klarer å produsere. Vi klarer dermed ikike oppfylle etterspørselen og formelen for EOQ faller sammen. EOQ blir meningsløst.

e) Med produksjonsrate inkludert vil lageret *gradvis* fylles opp med en rate $P-D$, siden vi selger unna mens vi produserer.

Dette medfører at den totale lagermengden over en syklus øker. For å kompensere denne økningen må lagerkostnaden minkes. Dette ser vi også ifra fra formelen (**??**), hvor lagerkostnaden reduseres i forhold til vanlig EOQ. Vi kan definere "justert" lagerkostnad:

$$H^P = H\left(1-\frac{D}{P}\right) \tag{64}$$

slik at

$$X^*(P) = \sqrt{\frac{2DS}{H^P}} \tag{65}$$

Siden vi antar at etterspørselsraten D er lavere enn produksjonsraten P, har vi alltid at

$$H^P \geq H \tag{66}$$

som igjen impliserer at optimal ordrestørrelse øker:

$$X^*(P) \geq X^* \tag{67}$$

f) Lagerkapasiteten impliserer at:

$$X^*(P) \leq 5 \qquad \text{(i 100 000 liter)} \tag{68}$$

Vi finner derfor grenseverdien for P ved å løse likningen:

$$X^*(P) = 5 \tag{69}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{\frac{2DS}{H\left(1-\frac{D}{P}\right)}} = 5 \tag{70}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2DS}{H\left(1-\frac{D}{P}\right)} = 25 \tag{71}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2DS}{H} = 25\left(1-\frac{D}{P}\right) \tag{72}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2DS}{25H} = 1-\frac{D}{P} \tag{73}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{D}{P} = 1-\frac{2DS}{25H} \tag{74}$$

$$\Updownarrow$$

$$P = \frac{D}{1-\frac{2DS}{25H}} = \frac{1}{1-\frac{2\cdot 1\cdot 60000}{25\cdot 15384}} = 1.45 \tag{75}$$

<u>Produksjonsraten kan derfor ikke bli lavere enn 145 000 liter pr uke.</u>

4) (Wagner-Within)

a) Vi skal finne optimal produksjonsplan ved hjelp av Wagner-Within algoritmen.

Data:[2]

$$D_t = \text{etterspørsel måned } t \text{ av Drygolin Ultimat} \tag{76}$$

$$s = \text{setupkostnaden for Drygolin Ultimat} = 100000 \tag{77}$$

$$h = \text{enhetslig overlagringskostnad for Drygolin Ultimat (pr 100 000 liter) pr uke} = 5000 \tag{78}$$

Variabler:

$$X_t = \text{produksjonsmengde i uke } t \tag{79}$$

$$I_t = \text{mengde overlagret fra uke } t \text{ til } t+1 \tag{80}$$

$$Y_t = 0 \text{ eller } 1 \text{ for hvorvidt produksjon finner sted i uke } t \tag{81}$$

[2] Det er ikke nødvendig å skrive opp disse definisjonene på eksamen. Data og variabler er underforståtte for Wagner-Within algoritmen. Vi har kun inkludert disse her for helheltens skyld.

Vi starter som vanlig med delproblemet med kun en periode:[3]

$\underline{P_1}$: (subproblem med kun første periode)

Siden vi har initielt lager på 2, mens etterspørselen er 2 i første periode, kan vi umiddelbart bruke opp lageret slik at justert etterspørsel blir 1 i første periode. Vi har dermed setup i første periode, dvs $Y_1 = 1$:

$$\underline{C_1^*} \;=\; s \cdot Y_1 \;=\; \underline{100} \cdot 1 = 1 \tag{82}$$

$\underline{P_2}$: (subproblem med de to første periodene)

$$\underline{C_2^*} = \min\Big[(\textit{siste bestilling i 1. periode})\ ,\ (\textit{siste bestilling i 2. periode}) \Big] \tag{83}$$

$$= \min\Big[s + hD_2\ ,\ s + C_1^* \Big] \tag{84}$$

$$= \min\Big[100 + 4 \cdot 6\ ,\ 100 + 100 \Big] \tag{85}$$

$$= \min\Big[\underline{124}\ ,\ 200 \Big] \tag{86}$$

$$= \underline{124} \tag{87}$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er C_{10}.

Horisontteoremet gir oss ingen frysing av uker i dette tilfellet.

[3] Vi skriver alle kostnadstall i antall 1000 for oversiktens skyld. Så setupkostnaden blir 100 mens lagerkostnaden blir 8. Dette kan dere også gjøre til eksamen, så lenge dere bemerker at dere gjør det.

$\underline{P_3}$: (subproblem med de tre første periodene)

Vi starter beregningene fra uke 2:

$$\underline{C_3^*} = \min\Big[\ \textit{(s.b.1)}\ ,\ \textit{(s.b.2)},\ \textit{(s.b.3)}\Big] \tag{88}$$

$$= \min\Big[\ (s + hD_2 + 2hD_3 + C_1^*)\ ,\ (s + hD_3 + C_1^*)\ ,\ (s + C_2^*)\Big] \tag{89}$$

$$= \min\Big[\ (124 + 2 \cdot 4 \cdot 12)\ ,\ (200 + 4 \cdot 12)\ ,\ (124 + 100)\Big] \tag{90}$$

$$= \min\Big[\ \underline{220}\ ,\ 248\ ,\ 224\Big] \tag{91}$$

$$= \underline{220} \tag{92}$$

Horisontteoremet gir oss ingen frysing av uker i dette tilfellet. [4]

[4] Legg merke til at vi benytter oss av at vi allerede har beregnet en del av uttrykkene i forrige delproblem.

$\underline{P_4:}$ (subproblem med de fire første periodene)

Vi starter beregningene fra uke 1:

$$
\begin{aligned}
C_4^* &= \min[\ \textit{(s.b.1)}\ ,\ \textit{(s.b.2)},\ \textit{(s.b.3)}\ ,\ \textit{(s.b.4)}\ ] \\
&= \min[\ (s + hD_2 + 2hD_3 + 3hD_4)\ , (s + hD_3 + 2hD_4 + C_1^*)\ , (s + hD_4 + C_2^*),\ (s + C_3^*)] \\
&= \min[(220 + 3 \cdot 4 \cdot 10),\ (248 + 2 \cdot 4 \cdot 10),\ (224 + 4 \cdot 10),\ (220 + 100)] \\
&= \min[340,\ 328,\ \underline{264},\ 320] \\
&= 264
\end{aligned}
$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte uke 1 og uke 2 fra videre beregninger.

$\underline{P_5:}$

Vi starter beregningene fra uke 3:

$$C_5^* = \min[\ (s.b.3),\ (s.b.4)\ ,\ (s.b.5)]$$

$$= \min[\ (s + hD_4 + 2h \cdot D_5 + C_2^*),$$

$$(s + hD_5 + C_3^*),\ (s + C_4^*)]$$

$$= \min[(264 + 3 \cdot 4 \cdot 22),\ (320 + 2 \cdot 4 \cdot 222),\ (260 + 5 \cdot 20),\ (264 + 100)]$$

$$= \min[440,\ 408,\ \underline{364}]$$

$$= 364$$

Horisontteoremet sier da at vi kan fryse uke 3 og 4.

$\underline{P_6\text{:}}$

Vi starter beregningene fra uke 5:

$$
\begin{aligned}
C_6^* &= \min[\ (\mathit{s.b.5})\ ,\ (\mathit{s.b.6})] \\
&= \min[(s + hD_6 + C_4^*),\ (s + C_5^*)] \\
&= \min[(364 + 4 \cdot 6,\ (364 + 100)] \\
&= \min[\underline{388},\ 464] \\
&= 388
\end{aligned}
$$

Horisontteoremet gir ikke noe ekstra .

$\underline{P_7:}$

Vi starter beregningene fra uke 5:

$$
\begin{aligned}
C_7^* &= \min[\ (s.b.5)\ ,\ (s.b.6)\ ,\ (s.b.7)] \\
&= \min[(C_4^* + s + hD_6 + 2hD_7),\ (C_5^* + s + hD_7),\ (C_6^* + s)] \\
&= \min[(388 + 2 \cdot 4 \cdot 7,\ (464 + 4 \cdot 7),\ (388 + 100)] \\
&= \min[\underline{444},\ 492,\ 488] \\
&= 444
\end{aligned}
$$

Horisontteoremet gir ikke noe ekstra .

$\underline{P_8\text{: (det fulle problemet)}}$

Vi starter beregningene fra 5. måned.

$$C_8^* = \min[\ (s.b.5)\ , (s.b.6)\ ,\ (s.b.7),\ (s.b.8)]$$

$$= \min[(C_4^* + s + hD_6 + 2hD_7 + 3hD_8),\ (C_5^* + s + hD_7 + 2hD_8),$$

$$(C_6^* + s + hD_8),\ (C_7^* + s)]$$

$$= \min[(444 + 3 \cdot 4 \cdot 5),\ (492 + 2 \cdot 4 \cdot 5,\ (488 + 4 \cdot 5),\ (444 + 100)]$$

$$= \min[\underline{\underline{504}},\ 532,\ 508,\ 544]$$

$$= 504$$

Vi har nå funnet optimal kostnad. Vi finner optimale produksjonsperioder $C_{xxxxxxxx}$ ved å starte bakfra og jobbe oss frem til periode 1:

$$C_{xxxxxxxx} = C_{xxxx1000} \qquad \text{(siste bestilling i uke 5)} \tag{93}$$

$$C_{xxxx1000} = C_{xx101000} \qquad \text{(siste bestilling i uke 3)} \tag{94}$$

$$C_{xx101000} = C_{10101000} \qquad \text{(siste bestilling i uke 1)} \tag{95}$$

Vi har altså $\underline{\underline{C_{10101000} = 504000}}$. videre må vi finne optimale produksjonsmengder og lagermegnder.

Produksjonsmengder: (finnes ved hjelp av "dominante produksjonsplaner")

$$X_1 = D_2 + (D_1 - I_0) = 6 - (3 - 2) = 7 \tag{96}$$
$$X_2 = 0 \tag{97}$$
$$X_3 = D_3 + D_4 = 12 + 10 = 22 \tag{98}$$
$$X_4 = 0 \tag{99}$$
$$X_5 = D_5 + D_6 + D_7 + D_8 + I_8 = 22 + 6 + 7 + 2 + 3 = 40 \tag{100}$$
$$X_6 = 0 \tag{101}$$
$$X_7 = 0 \tag{102}$$
$$X_8 = 0 \tag{103}$$

Lagermengder:

$$I_1 = D_2 = 6 \tag{104}$$
$$I_2 = 0 \tag{105}$$
$$I_3 = D_4 = 10 \tag{106}$$
$$I_4 = 0 \tag{107}$$
$$I_5 = D_6 + D_7 + D_8 + I_8 = 6 + 7 + 3 + 2 = 18 \tag{108}$$
$$I_6 = D_7 + D_8 + I_8 = 7 + 3 + 2 = 12 \tag{109}$$
$$I_7 = D_8 + I_8 = 2 + 3 = 5 \tag{110}$$

b) Med en maksimal lagerkapasitet på 170 000 liter drygolin Ultimat i uken, må vi sjekke om vi har nok kapasitet til å gjennomføre planen fra oppgave 4.a.

Vi har fra likning (**??**) at $I_5 = 18$, dvs lageret i uke 5 er 180 000 liter. Siden dette overskrider lagerkapasiteten, er *ikke* planen fra Wagner-Within algoritmen gyldig lenger.

c) På grunn av lagerkapasiteten kan Wagner-Withins teorem om "Dominante produksjons-planer" bli brutt, siden man må tillate å splitte lageret av en etterspørsel i flere lagerperioder.

d) Ny dominant produksjonsplan kan vurderes ved å se på P_8 problemet i oppgave 4a). Vi fant:

$$
\begin{aligned}
C_8^* &= \min[\ (s.b.5)\ , (s.b.6)\ ,\ (s.b.7),\ (s.b.8)] \\
&= \min[(C_4^* + s + hD_6 + 2hD_7 + 3hD_8),\ (C_5^* + s + hD_7 + 2hD_8), \\
&\qquad (C_6^* + s + hD_8),\ (C_7^* + s)] \\
&= \min[(444 + 3 \cdot 4 \cdot 5),\ (492 + 2 \cdot 4 \cdot 5,\ (488 + 4 \cdot 5),\ (444 + 100)] \\
&= \min[\underline{\underline{504}},\ 532,\ 508,\ 544] \\
&= 504
\end{aligned}
$$

Siden problemet ligger i uke 5, er det klart at vi må ha en ekstra produksjonsperiode etter uke 5. Siden vi får oppgitt at vi kan finne en dominant løsning, er det aktuelt å benytte det laveste *alternativet* til 504, nemlig 508.

Vi finner optimale produksjonsperioder $C_{xxxxxxxx}$ ved å starte bakfra og jobbe oss frem til periode 1:

$$C_{xxxxxxxx} = C_{xxxxxx10} \qquad \text{(siste bestilling i uke 7)} \tag{111}$$

$$C_{xxxxxx10} = C_{xxxx1010} \qquad \text{(siste bestilling i uke 5)} \tag{112}$$

$$C_{xxxx1010} = C_{xx101010} \qquad \text{(siste bestilling i uke 3)} \tag{113}$$

$$C_{xx101010} = C_{10101010} \qquad \text{(siste bestilling i uke 1)} \tag{114}$$

Vi har altså $C_{10101010} = 508000$. Vi må nå sjekke om løsningen oppfyller lagerkapasiteten:

<u>Lagermengder:</u>

$$I_1 = D_2 = 6 \tag{115}$$
$$I_2 = 0 \tag{116}$$
$$I_3 = D_4 = 10 \tag{117}$$
$$I_4 = 0 \tag{118}$$
$$I_5 = D_6 = 6 \tag{119}$$
$$I_6 = 0 \tag{120}$$
$$I_7 = D_8 + I_8 = 2 + 3 = 5 \tag{121}$$

Som vi ser av lagerverdiene, er lagerkapasiteten oppfylt. Vi kan dermed konkludere at vi har funnet optimal løsning med totalkostnad 508 000.

Testeksamen 2017

LØSNING: Testeksamen mai 2017

"*SCM200 Lager -og Produksjonsstyring*", vår 2017

Oppgave 1: (prognostisering, 25 %)

a) Vi har fra formelen for eksponensiell glatting at[1]:

$$F_2 = X_1 = 720 \tag{1}$$

$$F_3 = \theta F_2 + (1-\theta)X_2 = 0.8 \cdot 720 + 0.2 \cdot 700 = 716 \tag{2}$$

$$F_4 = \theta F_3 + (1-\theta)X_3 = 0.8 \cdot 716 + 0.2 \cdot 730 = 718.8 \tag{3}$$

$$F_5 = \theta F_4 + (1-\theta)X_4 = 0.8 \cdot 718.8 + 0.2 \cdot 710 = 717.0 \tag{4}$$

$$F_6 = \theta F_5 + (1-\theta)X_5 = 0.8 \cdot 717 + 0.2 \cdot 690 = 711.6 \tag{5}$$

$$F_7 = \theta F_6 + (1-\theta)X_6 = 0.8 \cdot 711.6 + 0.2 \cdot 740 = 717.3 \tag{6}$$

Prognosen for 2017 blir dermed $\underline{\underline{F_7 = 717.3}}$ tusen tonn alumina.

[1] Vi har brukt den stegvise formelen for eksponensiell glatting. Alternativt kunne en ha brukt den autokorrektive formelen.

b) Vi har 5 historiske prognoser: F_2, F_3, F_4, F_5 og , F_6. MSE er da gitt ved:

$$\underline{\underline{MSE}} = \frac{1}{T-s+1}\sum_{t=2}^{6}\left(X_t - F_t\right)^2 \tag{7}$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{t=2}^{6}\left(X_t - F_t\right)^2 \tag{8}$$

$$= \frac{1}{5}\Big((700-720)^2 + (730-716)^2 + (710-718.8)^2 \tag{9}$$

$$+ (690-717.0)^2 + (740-711.6)^2 \Big) \tag{10}$$

$$= \underline{\underline{441.9}} \tag{11}$$

c) Vi har to forskjellige MSE-verdier:

$$MSE_1 = 300 \qquad (2005-2011) \tag{12}$$

$$MSE_2 = 441.9 \qquad (2011-2016) \tag{13}$$

Siden MSE_1 er basert på $n_1 = 7$ prognoser,
mens MSE_2 er basert på $n_2 = 5$ prognoser.
Totalt har vi da $n = n_1 + n_2 = 12$ i perioden 2005 - 2016.
Ny MSE_{ny} blir dermed:

$$\underline{\underline{MSE_{\text{ny}}}} = \frac{n_1}{n_1+n_2}MSE_1 + \frac{n_2}{n_1+n_2}MSE_2 \tag{14}$$

$$= \frac{7}{12}300 + \frac{5}{12}441.9 \tag{15}$$

$$= \underline{\underline{359.1}} \tag{16}$$

d) Prognosene F_t, med $t = 2..6$, er oppgitt i oppgaven:

$$
\begin{aligned}
F_2 &= X_1 = 720 && (17)\\
F_3 &= \theta F_2 + (1-\theta)X_2 = 704 && (18)\\
F_4 &= \theta F_3 + (1-\theta)X_3 = 724.8 && (19)\\
F_5 &= \theta F_4 + (1-\theta)X_4 = 713.0 && (20)\\
F_6 &= \theta F_5 + (1-\theta)X_5 = 694.6 && (21)
\end{aligned}
$$

Deretter beregner vi MSE på nytt:

$$
\begin{aligned}
\underline{MSE} &= \frac{1}{T-s+1}\sum_{t=2}^{6}\left(X_t - F_t\right)^2 && (22)\\
&= \frac{1}{5}\sum_{t=2}^{6}\left(X_t - F_t\right)^2 && (23)\\
&= \frac{1}{5}\Big((700-720)^2 + (730-704)^2 + (710-724.8)^2 && (24)\\
&\qquad + (690-713)^2 + (740-694.6)^2 \Big) && (25)\\
&= \underline{777.0} && (26)
\end{aligned}
$$

Sammenligner MSE med glattingsparametere $\theta = 0.8$ og $\theta = 0.2$:

$$MSE(\theta = 0.8) = 441.9 \quad (27)$$

$$MSE(\theta = 0.2) = 777.0 \quad (28)$$

$MSE(\theta = 0.8)$ er betydelig mindre enn $MSE(\theta = 0.2)$.
Siden MSE et et mål som sammenligner prognosemetoder så blir konklusjonen at

$$\underline{\underline{\text{Hydro bør bruke glattingsparameter } \theta = 0.8}} \quad (29)$$

Konklusjonen er forventet fordi observasjonene varierer ganske kraftig fra år til år. En høy glattingsparameter, $\theta = 0.8$, vil glatte ut disse variasjonene og gi en mindre MSE.

■

Oppgave 2: (EOQ, 25 %)

a) EOQ-formelen har følgende forutsetninger:

- Konstant og kontinuerlig etterspørsel - kontinuerlig alumina forbrukes i et jevnt tempo - en kan forvente at produksjonen ved Årdal verk har en jevn rate, siden fastkostnadene er svært høye.
- Ingen stockout - vi antar at etterspørselen oppfylles og at forsinket leveranse ikke forekommer. En rimelig antakelse for Årdal verk.
- Uendelig prosess - vi antar at etterspørselen hverken har en start eller slutt - produksjonsprosessen ved Årdal verk vil neppe avsluttes ila. de neste årene.
- Inge føringer - vi antar at det ikke finnes noen føringer på ordrestørrelsen (for eksempel lagerkapasitet, produksjonskapasitet, bestillingskapasitet, tilgjengelig kapital etc.)
- Uendrede kostnader - kostnadene (lagerkostnader og ordrekostnader) i modellen er konstante, dvs. de endres ikke over tiden. Langtidstariffer for bestilling av tankskip og stabile innkjøpspriser tilsvarer at disse antakelsene er godt nok oppfylt.
- Ingen rabatter - vi antar at økte ordrestørrelser ikke gir kvantumsfordeler som for eksempel rabatter eller kvantumsfordeler ved produksjonen.
- Total leveranse - vi antar at alle enhetene som ble bestilt ankommer lageret i en batch. Dette er tilfelle for bestilling av alumina, siden alt ankommer med samme tankskip.

Siden den totale kostnadsfunksjonen for EOQ er relativt flat i minimumspunktet vil "små endringer i data" gi små endringer i optimal bestillingsmengde.

"Små endringer i data" betyr i prinsippet at antakelsene kan være litt feile.

b) EOQ-formelen gir:

$$\underline{\underline{X^*}} = \sqrt{\frac{2DS}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 717\,000 \cdot 1\,000\,000}{0.1 \cdot 10\,000}} = \underline{\underline{37\,868 \ \ \text{tonn}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{30}$$

som er optimal bestillingsmengde alumina, hvor vi har brukt at $H = iC$.

Optimal omløpstid O^* i antall uker er gitt ved:

$$\underline{O^*} = 52\,\frac{X^*}{D} = 52\,\frac{37\,868}{717\,000} = \underline{2.7} \tag{31}$$

altså det tar $\underline{\underline{\text{2.7 uker}}}$ mellom hver gang lageret blir tomt.

Dersom lageret er fullt ved starten av året så har vi totalt

$$\underline{\frac{52}{O^*}} = \frac{52}{2.7} = \underline{19.3} \tag{32}$$

altså Hydro vil totalt gjøre $\underline{\underline{\text{19 bestillinger}}}$ i 2017.

c) Vi vurderer totale kostnader for de to strategiene:

Strategi 1: (to mindre skip)

Ved å benytte to skip vil bestillingskostnaden øke fra 1 000 000 NOK til $S = 2 \cdot 700\,000 = 1\,400\,000$ NOK. Ny verdi for EOQ er dermed:

$$\underline{X^*} = \sqrt{\frac{2DS}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 717\,000 \cdot 1\,400\,000}{0.1 \cdot 10000}} = \underline{44\,806 \ \text{ tonn}} \tag{33}$$

Totale kostnader blir dermed:

$$\underline{C(44\,806)} = \frac{SD}{X^*} + \frac{HX^*}{2} \tag{34}$$

$$= \left(\frac{1\,400\,000 \cdot 717\,000}{44\,806} + \frac{0.1 \cdot 10\,000 \cdot 44\,806}{2} \right) \text{NOK} \tag{35}$$

$$= \underline{44\,806\,250 \ \text{ NOK}} \tag{36}$$

Strategi 2: (ett skip)

Ved å benytte ett skip blir Hydro tvunget til å redusere bestillingsmengden til $X = 30\,000$ tonn alumina per bestilling.

Totale kostnader blir dermed:

$$\underline{C(30\,000)} = \frac{SD}{X} + \frac{HX}{2} \tag{37}$$

$$= \left(\frac{1\,000\,000 \cdot 717\,000}{30\,000} + \frac{1\,000 \cdot 30\,000}{2} \right) \text{NOK} \tag{38}$$

$$= \underline{38\,900\,000 \quad \text{NOK}} \tag{39}$$

Konklusjon: Strategi 2 er den mest lønnsomme strategien.

■

Oppgave 3: (Fasilitetsdesign, 25 %)

a) Problemet er et lokasliseringsproblem siden vi har 5 potensielle lagerfasiliteter, hvor ikke alle nødvendigvis benyttes.

b) Problemet er et allokeringsproblem siden vi har 5 potensielle lagerfasiliteter som sammen skal tjene 3 produksjonshaller (markeder).

c) Vi har følgende indekseringer:

- lagerfasilitetene indekseres ved $i = 1, 2, 3, 4, 5$
- produksjonshallene indekseres ved $j = 1, 2, 3$

Vi definerer følgende data: [2]

$$I_i = \text{investeringskostnad lagerfasilitet } i, \text{ hvor } i = 1, \ldots, 5 \quad (40)$$

$$C_i = \text{årlig driftskostnad ved lagerfasilitet } i, \text{ hvor } i = 1, \ldots, 5 \quad (41)$$

$$D_j = \text{årlig etterspørsel etter karbonanoder ved produksjonshall } j, \text{ hvor } j = 1, 2, 3 \quad (42)$$

$$C_{ij} = \text{rutekostnad fra lager } i \text{ til produksjonshall } j\ i, \text{ hvor } i = 1, \ldots, 5 \text{ og } j = 1, 2, 3 \quad (43)$$

[2]Husk at data er størrelsen vi ikke kan påvirke.

d) Vi har to variabler:

1) Variabel 1:

Antall ganger en rute benyttes i løpet av et år:

$$X_{ij} \;=\; \text{antall ganger lager } i \text{ leverer til produksjonshall } j \text{ i året} \tag{44}$$

hvor $i = 1, 2, 3$ og $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

2) Variabel 2:

Hvorvidt en lageret skal benyttes eller ikke:

$$Y_i \;=\; \begin{cases} 1 \;\; , & \text{dersom vi bruker lagerfasilitet } i \\ 0 \;\; , & \text{hvis ikke} \end{cases} \tag{45}$$

hvor $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

e) Målfunksjonen C er gitt ved totale investerings- og driftskostnader:

$$\underline{\underline{C \;=\; \sum_{i=1}^{5} \big(I_i + C_i\big) Y_i \;+\; \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{3} C_{ij} X_{ij}}} \tag{46}$$

f) Vi har to føringer:

1) Føring 1:

Etterspørselen ved hver produksjonshall $j = 1, 2, 3$ må oppfylles:

$$\sum_{i=1}^{5} X_{ij} \;=\; D_j \tag{47}$$

2) Føring 2:

Lagerfasilitet ikke benyttet $\rightarrow$ ingen leveranse fra lageret. På logisk form:

$$\text{Hvis} \quad \underbrace{Y_i \;=\; 0}_{\text{intet lager}} \quad \text{så er} \quad \underbrace{X_{ij} \;=\; 0}_{\text{ingen leveranse}} \tag{48}$$

hvor $\underbrace{i = 1, 2, 3, 4, 5}_{\text{lagerfasilitet}}$ og $\underbrace{j = 1, 2, 3}_{\text{produksjonshall}}$, eller på matematisk form (ikke-lineær):

$$X_{ij}(1 - Y_i) \;=\; 0 \tag{49}$$

g) Vi utvider modellen til å inkludere lagerkapasitetene:

Nye data:

$$\bar{I}_j \quad = \quad \text{årlig lagerkapasitet for lagerfasilitet } i\text{, hvor } i = 1, \ldots, 5 \tag{50}$$

$$E_k \quad = \quad \text{årlig etterspørsel etter karbonanoder for aluminiumsverk } k\text{, hvor } k = 1, 2, 3, 4 \tag{51}$$

Nye variabler:

Vi må bokføre hvor mye vi leverer fra hvert lager til de eksterne aluminiumsverkene:

$$Z_i \ = \ \text{årlig antall anoder levert eksternt fra lager } i \tag{52}$$

hvor $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Legg merke til at det *ikke* er nødvendig å spesifiere til hvilket aluminiumsverk hvert lager leverer til, siden vi kun bryr oss om de *interne* kostnadene.

Vi har to nye føringer:

1) Ny føring 1:

Lagerkapasitet:
Vi kan nå beskrive lagerkapasiteten ved hver lagerfasilitet $i = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} \;+\; Z_i \;\leq\; \overline{I}_i \tag{53}$$

2) Ny føring 2:

Ekstern etterspørsel oppfylt:
Vi må oppfylle den *totale* etterspørselen ved de 4 aluminiumsverkene:

$$\sum_{i=1}^{5} Z_i \;=\; \sum_{k=1}^{4} E_k \tag{54}$$

■

Oppgave 4: (Wagner-Whitin, 25 %)

a) Omstillingskostnaden er:

$$\underline{S} \;=\; 10 \cdot 15\,000 \text{ NOK} \;=\; \underline{150\,000 \text{ NOK}} \tag{55}$$

Lagerkostnaden:

$$H \;=\; 100 \text{ NOK per anode per uke} \tag{56}$$

som oppgitt i oppgaveteksten.

Startlager:

$$I_0 \;=\; 100 \tag{57}$$

anoder, som også er oppgitt i oppgaveteksten.

Periode 1: (subproblem med kun første periode)

Etterspørselen i uke 1 er $D_1 = 550$ anoder.
Det initielle lageret $I_0 = 100$ er ikke stort nok til å dekke etterspørselen så vi må ha produksjon i første periode:

$$\underline{C_1^*} \;=\; S \;=\; \underline{150\,000 \text{ NOK}} \tag{58}$$

Periode 2: (subproblem de 2 første periodene)

Dominante produksjonsplaner gir *to* mulige optimale løsninger: C_{11} og C_{10}.
Vi regner ut disse verdiene:

$$\underline{C_2^*} = \min\Big[C_{10} \;,\; C_{x1} \Big] \tag{59}$$

$$= \min\Big[(\textit{siste bestilling i 1. periode}) \;,\; (\textit{siste bestilling i 2. periode}) \Big] \tag{60}$$

$$= \min\Big[C_1^* + H \cdot D_2 \;,\; C_1^* + S \Big] \tag{61}$$

$$= \min\Big[150\,000 + 100 \cdot 350 \;,\; 150\,000 + 150\,000 \Big] \tag{62}$$

$$= \min\Big[\underline{185\,000} \;,\; 300\,000 \Big] \tag{63}$$

$$= \underline{185\,000 \text{ NOK}} \tag{64}$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er C_{10}.

Vi vet da at Horisontteoremet kutter ingen perioder.

Periode 3: (subproblem de 3 første periodene)

$$\underline{C_3^*} = \min\left[C_{100} \; , \; C_{x10} \; , \; C_{xx1} \right] \tag{65}$$

$$= \min\left[(\textit{siste bestilling i 1. periode}) \; , \; (\textit{siste bestilling i 2. periode}) \; , \; (\textit{siste bestilling i 3. periode}) \right] \tag{66}$$

$$= \min\left[(C_{10} + 2 \cdot H \cdot D_3) \; , \; (C_{x1} + H \cdot D_3) \; , \; (C_2^* + S) \right] \tag{67}$$

$$= \min\left[(185\,000 + 2 \cdot 100 \cdot 400) \; , \; (300\,000 + 100 \cdot 400) \; , \; (185\,000 + 150\,000) \right] \tag{68}$$

$$= \min\left[\underline{265\,000} \; , \; 340\,000 \; , \; 335\,000 \right] \tag{69}$$

$$= \underline{265\,000 \text{ NOK}} \tag{70}$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er C_{100}.

Vi vet da at Horisontteoremet kutter ingen perioder.

Periode 4: (subproblem de 4 første periodene)

$$\underline{C_4^*} = \min\Big[C_{1000}\ ,\ C_{x100}\ ,\ C_{xx10}\ ,\ C_{xxx1}\Big] \tag{71}$$

$$= \min\Big[\textit{(siste bestilling i 1. periode)}\ ,\ \textit{(siste bestilling i 2. periode)}\ , \tag{72}$$

$$\textit{(siste bestilling i 3. periode)}\ ,\ \textit{(siste bestilling i 4. periode)}\Big]$$

$$= \min\Big[(C_{100} + 3\cdot H\cdot D_4)\ ,\ (C_{x10} + 2\cdot H\cdot D_4)\ ,\ (C_{xx1} + H\cdot D_4)\ ,\ (C_3^* + S)\Big] \tag{73}$$

$$= \min\Big[(265\,000 + 3\cdot 100\cdot 850)\ ,\ (340\,000 + 2\cdot 100\cdot 850)\ , \tag{74}$$

$$(335\,000 + 100\cdot 850)\ ,\ (265\,000 + 150\,000)\Big]$$

$$= \min\Big[520\,000\ ,\ 510\,000\ ,\ 420\,000\ ,\ \underline{415\,000}\Big] \tag{75}$$

$$= \underline{415\,000\ \text{NOK}} \tag{76}$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er C_{xxx1}.

Vi vet da at Horisontteoremet kutter periode 1, 2 og 3.

Periode 5: (subproblem de 5 første periodene)

Siden horisontteoremet kuttet periodene 1, 2 og 3 i forrige steg,
kan vi nå starte fra periode 4:

$$\underline{C_5^*} = \min\Big[C_{xxx10} \; , \; C_{xxxx1} \Big] \tag{77}$$

$$= \min\Big[(\textit{siste bestilling i 4. periode}) \; , \; (\textit{siste bestilling i 5. periode}) \Big] \tag{78}$$

$$= \min\Big[C_{xxx1} + H \cdot D_5 \; , \; C_4^* + S \Big] \tag{79}$$

$$= \min\Big[415\,000 + 100 \cdot 500 \; , \; 415\,000 + 150\,000 \Big] \tag{80}$$

$$= \min\Big[\underline{465\,000} \; , \; 565\,000 \Big] \tag{81}$$

$$= \underline{465\,000 \text{ NOK}} \tag{82}$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er C_{xxx10}.

Vi vet da at Horisontteoremet kutter ingen perioder.

Periode 6: (det fulle problemet)

Siden vi har et krav om sluttlager på $I_6 = 200$ anoder så legger vi disse til i etterspørselen i periode 6, dvs.:

$$\underline{\tilde{D}_6} \;=\; D_6 + I_6 \;=\; 700 + 200 \;=\; \underline{900} \tag{83}$$

Dermed:

$$\underline{C_6^*} \;=\; \min\Big[\, C_{xxx100} \;,\; C_{xxxx10} \;,\; C_{xxxxx1} \,\Big] \tag{84}$$

$$= \min\Big[\, (\textit{siste bestilling i 4. periode}) \;,\; (\textit{siste bestilling i 5. periode}) \;, \tag{85}$$

$$(\textit{siste bestilling i 6. periode}) \Big]$$

$$= \min\Big[\, (C_{xxx10} + 2 \cdot H \cdot \tilde{D}_6) \;,\; (C_{xxxx1} + H \cdot \tilde{D}_6) \;,\; (C_5^* + S) \Big] \tag{86}$$

$$= \min\Big[\, (465\,000 + 2 \cdot 100 \cdot 900) \;,\; (565\,000 + 100 \cdot 900) \;,\; (465\,000 + 150\,000) \Big] \tag{87}$$

$$= \min\Big[\, 645\,000 \;,\; 655\,000 \;,\; \underline{615\,000} \Big] \tag{88}$$

$$= \underline{615\,000 \text{ NOK}} \tag{89}$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er C_{xxxxx1}.

Oppsummert:

- C_{xxxxx1}, siden siste bestilling skjer i uke 6. Vi hopper dermed til delproblem 5.
- C_{xxx101}, siden siste bestilling skjer i uke 4 for delproblem 5. Vi hopper til delproblem 3.
- C_{100101}, siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 3.

<u>Optimal løsning</u>:

$$\underline{\underline{C^*}} = C_{100101} = \underline{\underline{615\,000 \ \ \text{NOK}}} \tag{90}$$

<u>Bestillingsplanen</u>: (Y_t-variablene)

$$Y_1 = 1 \tag{91}$$
$$Y_2 = 0 \tag{92}$$
$$Y_3 = 0 \tag{93}$$
$$Y_4 = 1 \tag{94}$$
$$Y_5 = 0 \tag{95}$$
$$Y_6 = 1 \tag{96}$$

<u>Produksjonsmengder</u>:

Vi finner X_t-variablene ved å bruke teoremet om "*Dominante produksjonsplaner*", kun hele etterspørselsbehov.

$$\underline{\underline{X_1}} = D_1 - I_0 + D_2 + D_3 = 550 - 100 + 350 + 400 = \underline{\underline{1\,200}} \tag{97}$$
$$X_2 = 0 \tag{98}$$
$$X_3 = 0 \tag{99}$$
$$\underline{\underline{X_4}} = D_4 + D_5 = 850 + 500 = \underline{\underline{1\,350}} \tag{100}$$
$$X_5 = 0 \tag{101}$$
$$\underline{\underline{X_6}} = D_6 + I_6 = 700 + 200 = \underline{\underline{900}} \tag{102}$$

Lagermengder:

Fra X_t-variablene finner vi optimale lagermengder:

$$\underline{\underline{I_1}} = D_2 + D_3 = 350 + 400 = 750 \tag{103}$$

$$\underline{\underline{I_2}} = D_3 = \underline{\underline{400}} \tag{104}$$

$$I_3 = 0 \tag{105}$$

$$\underline{\underline{I_4}} = D_5 = \underline{\underline{500}} \tag{106}$$

$$I_5 = 0 \tag{107}$$

b) Just-In-Time produksjon betyr at det ikke er noe lager:

$$I_t \;=\; 0 \tag{108}$$

Den minste kostnaden i en gitt periode må da være i sise ledd: $C_t^* = \min\left[\,...\;,\;...\;,\;\underline{...}\,\right]$.
Fordi minimum kommer i siste periode, vil horisontteoremet alltid kutte periodene før.
Derfor er det kun to perioder for hver delproblem.
Dersom vi bruker dette og følger stegene fra oppgave **4a** så innser vi at:

$$C_1^* \;=\; S \tag{109}$$

$$C_2^* \;=\; \min\left[S + HD_2 \;,\; \underline{S + S}\right] \tag{110}$$

$$C_3^* \;=\; \min\left[2S + HD_3 \;,\; \underline{2S + S}\right] \tag{111}$$

$$C_4^* \;=\; \min\left[3S + HD_4 \;,\; \underline{3S + S}\right] \tag{112}$$

$$C_5^* \;=\; \min\left[4S + HD_5 \;,\; \underline{4S + S}\right] \tag{113}$$

$$C_6^* \;=\; \min\left[5S + HD_6 \;,\; \underline{5S + S}\right] \tag{114}$$

hvor vi innser den generelle formen

$$C_t^* \;=\; \min\left[(t-1)X + HD_t \;,\; \underline{tX}\right] \tag{115}$$

hvor $t = 2, 3, 4, 5, 6$. Den minste kostnaden er i siste ledd når:

$$(t-1)S + HD_t \;\;\geq\;\; tS \tag{116}$$

og løser med hensyn på S alene:

$$\cancel{tS} - S + HD_t \;\;\geq\;\; \cancel{tS} \tag{117}$$

$$HD_t \;\;\geq\;\; S \tag{118}$$

Den minste etterspørselen D_t gir den minste oppstartskostnaden. Siden

$$\min_{t=2,3,4,5,6} D_t \;=\; D_2 = 350 \tag{119}$$

så er

$$\underline{S} \;\leq\; 100 \cdot 350 \text{ NOK} \;=\; \underline{35\,000 \text{ NOK}} \tag{120}$$

Dersom oppstartskostnaden reduseres til $\underline{\underline{35\,000 \text{ NOK}}}$
så får Hydro Just-In-Time produksjon.

Oppstartstiden må da reduseres til:

$$\frac{S}{15\,000} \;=\; \frac{35\,000}{15\,000} \;=\; 2.33 \quad \text{timer} \tag{121}$$

Altså Hydro må redusere oppstartsiden med $\quad (10 - 2.33)$ timer $=$ $\underline{\underline{7.66 \text{ timer}}}$
for å oppnå Just-In-Time produksjon.

$\blacksquare$

Hovedeksamen 2017

LØSNING: Hovedeksamen mai 2017

"*SCM200 Lager -og Produksjonsstyring*", vår 2017

Oppgave 1: (prognostisering, 25 %)

a) *i*) Vi bruker den feilkorrigerende for eksponensiell glatting:

$$\underline{\underline{F_{2017}}} = X_{2016} - \theta E_{2016} = \big(7.1 - 0.8 \cdot 0.32\big) \text{ TWh} = \underline{\underline{6.844 \text{ TWh}}} \tag{1}$$

ii) Prognosefeilen for 2016 er:

$$\underbrace{E_{2016}}_{0.32} = \underbrace{X_{2016}}_{7.1} - F_{2016} \tag{2}$$

og løser med hensyn på F_{2016} alene:

$$\underline{\underline{F_{2016}}} = X_{2016} - E_{2016} \tag{3}$$

$$= \big(7.1 - 0.32\big) \text{ TWh} = \underline{\underline{6.78 \text{ TWh}}} \tag{4}$$

b) *i*) Hydro har valgt en relativt høy glattingsparameter ($\theta = 0.8$).
En høy galttingsparameter gjør at store endringer i strømforbruket glattes ut.

Dette er *ikke* en ønsket egenskap ved prognosemetoden siden metoden dermed ikke fanger opp effekten fra nye forbedrede produksjonsceller.

Ja, det er derfor fornuftig å endre glattingsparameteren.

ii) Hydro ønsker derfor en glattingsparameter som responderer bedre med endringer i strømforbruket enn den de har.

Det er derfor fornuftig for Hydro å redusere glattingsparameteren slik at metoden blir mer responsiv til plutselige fall i strømforbruket.

c) *i*) Forbruket i 2017 er redusert med 15.1 % sammenlignet med 2016:

$$\underbrace{X_{2017}}_{3.4} = X_{2016} - 0.151 X_{2016} \tag{5}$$

Løser med hensyn på X_{2016} alene:

$$\underline{\underline{X_{2016}}} = \frac{X_{2017}}{1 - 0.151} = \frac{3.4}{1 - 0.151}\ \text{TWh} = \underline{\underline{4.00\ \text{TWh}}} \tag{6}$$

Forbruket i 2017 er redusert med 14.6 % sammenlignet med 2015:

$$X_{2017} = X_{2015} - 0.146 X_{2015} \tag{7}$$

Løser med hensyn på X_{2015} alene:

$$\underline{\underline{X_{2015}}} = \frac{X_{2017}}{1 - 0.146} = \frac{3.4}{1 - 0.146}\ \text{TWh} = \underline{\underline{3.98\ \text{TWh}}} \tag{8}$$

ii) I oppgaven var forbrukene X_{2017} og X_{2014} oppgitt.
Ovenfor regnet vi ut X_{2015} og X_{2016}.

Hydro har dermed 4 observasjoner tilgjengelig for estimering av ny glattingsparameter.

d) *i*) MSE er et mål på avstanden mellom observasjonene og de tilsvarende prognosene fra en prognosemetode.

Jo "nærmere" prognosene er observasjonene, desto bedre er prognosemetoden. Derfor er MSE et godt mål å bruke når en skal sammenlikne to prognosemetoder, f.eks. ved å bruke to forskjellige glattingsparametre ved eksponensiell glatting.

ii) Den mest "optimale" [1] måten å bestemme glattingsparameteren basert på MSE, er å skrive opp MSE som en funksjon av θ_{ny}:

$$MSE(\theta_{ny}) \;=\; \frac{1}{3}\Big(E^2_{2015}(\theta_{ny}) + E^2_{2016}(\theta_{ny}) + E^2_{2017}(\theta_{ny}) \Big) \tag{9}$$

Hydro kan nå bestemme θ_{ny} ved å minimere $MSE(\theta_{\text{ny}})$ med hensyn på θ_{ny} under bibetingelsen $0 \le \theta_{ny} \le 1$.

PS:
Legg merke til at selv om vi har 4 observasjoner så har vi kun $4 - 1 = 3$ prognosefeil E_i.

■

[1] Vi gir også delvis score for andre svar som f.eks. "prøv og feil" metodikk.

Oppgave 2: (EOQ, 25 %)

a) Setupkostnaden S er

$$\underline{S} \;=\; 30 \cdot 70\,000 \text{ NOK} \;=\; \underline{2\,100\,000 \text{ NOK}} \tag{10}$$

EOQ-formelen gir:

$$\underline{\underline{X^*}} \;=\; \sqrt{\frac{2DS}{H}} \;=\; \sqrt{\frac{2 \cdot 204\,000 \cdot 2\,100\,000}{5\,000}} \text{ tonn} \;=\; \underline{\underline{13\,090 \;\; \text{tonn}}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{11}$$

som er optimal seriestørrelse for primæraluminium.

Optimal omløpstid O^* i antall uker er gitt ved:

$$\underline{O^*} \;=\; 52\,\frac{X^*}{D} \;=\; 52\,\frac{13\,090}{204\,000} \;=\; \underline{3.3} \tag{12}$$

altså det tar $\underline{\underline{\text{3.3 uker}}}$ mellom hver gang lageret blir tomt.

b) Antakelsen om total leveranse er åpenbart brutt ved Hydro.
Produksjonen av primæraluminium har en gitt produksjonshastighet (204 000 tonn per året).

Det er derfor ganske urealistisk å anta at 13 090 tonn primæraluminium produseres alt-i-ett.

c) Vi skal i denne oppgaven finne forholdet

$$Z = \frac{X^*}{\tilde{X}} \tag{13}$$

slik at $\frac{C(X^*)}{C(\tilde{X})}$ ikke overskrider 1.25:

$$\frac{C(X^*)}{C(\tilde{X})} \leq 1.25 \tag{14}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{X}}{X^*} + \frac{X^*}{\tilde{X}}\right) \leq 1.25 \tag{15}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z} + Z\right) \leq 1.25 \qquad \Big| \cdot 2 \tag{16}$$

$$\frac{1}{Z} + Z \leq 2.5 \qquad \Big| \cdot Z \tag{17}$$

$$1 + Z^2 \leq 2.5Z \tag{18}$$

$$Z^2 - 2.5Z + 1 \leq 0 \tag{19}$$

Vi finner nullpunktene til denne andregradslikning via ABC-formelen: [2]

$$Z = \frac{-(-2.5) \pm \sqrt{(-2.5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2.5 \pm \sqrt{2.25}}{2} = \frac{2.5 \pm 1.5}{2} \tag{20}$$

som har to løsninger:

$$\underline{Z} = \frac{2.5 - 1.5}{2} = \underline{0.5} \qquad \text{eller} \qquad \underline{Z} = \frac{2.5 + 2.5}{2} = \underline{2} \tag{21}$$

Vi har dermed at:

$$\underline{\underline{0.5 \leq \frac{X^*}{\tilde{X}} \leq 2}} \tag{22}$$

gir $\frac{C(X^*)}{c(\tilde{X})}$ ikke overskrider 1.25.

[2] $a = 1$, $b = -2.5$, $c = 1$.

d) Den justerte EOQ-formelen gir:

$$\underline{\underline{\tilde{X}}} = \sqrt{\frac{2DS}{H\left(1-\frac{D}{P}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 204\,000 \cdot 2\,100\,000}{5\,000 \cdot \left(1-\frac{204\,000}{408\,000}\right)}}\ \text{tonn} = \underline{\underline{18\,513\ \ \text{tonn}}} \tag{23}$$

som gir forholdet:

$$\underline{\frac{X^*}{\tilde{X}}} = \frac{13\,090\ \cancel{\text{tonn}}}{18\,513\ \cancel{\text{tonn}}} = \underline{0.71} \tag{24}$$

<u>Konklusjon</u>:
Dersom logistikkgruppa *ikke* tar høyde for at primæraluminium har en gitt produksjonshastighet så får de <u>under 25 % økning</u> i kostnader enn dersom de tar høyde for det.

■

Oppgave 3: (aggregert planlegging, 25 %)

a) Vi har følgende indekseringer:

- produktfamiliene indekseres ved $i = 1, 2$
- kvartalene indekseres ved $t = 1, 2, 3, 4$

Vi definerer følgende data: [3]

$$D_{it} = \text{etterspørsel (tonn) etter produktfamilie } i \text{ i kvartal } t, \text{ hvor } i = 1,2 \text{ og } t = 1,2,3,4 \tag{25}$$

$$R_i = \text{bearbeidingstid (timer per tonn) for produktfamilie } i, \text{ hvor } i = 1,2 \tag{26}$$

$$H_i = \text{lagerkostnad per tonn per kvartal for produktfamilie } i, \text{ hvor } i = 1,2 \tag{27}$$

$$S_i = \text{setupkostnad for produktfamilie } i, \text{ hvor } i = 1,2 \tag{28}$$

$$C_{it} = \text{strømkostnader per tonn av produktfamilie } i \text{ i kvartal } t, \text{ hvor } i = 1,2 \text{ og } t = 1,2,3,4 \tag{29}$$

$$I_{i0} = \text{startslager } (t = 0) \text{ for produktfamilie } i, \text{ hvor } i = 1,2 \tag{30}$$

$$I_{i4} = \text{sluttlager } (t = 4) \text{ for produktfamilie } i, \text{ hvor } i = 1,2 \tag{31}$$

$$\overline{R}_i = \text{maksimalt antall timer tilgjengelig per kvartal for familie } i, \text{ hvor } i = 1,2 \tag{32}$$

[3] Husk at data er størrelsen vi ikke kan påvirke.

b) Vi har tre typer variabler:

1) Variabel 1:

Antall tonn produsert av hver familie per kvartal:

$$X_{it} \;=\; \text{antall tonn produsert av produktfamilie } i \text{ i kvartal } t \tag{33}$$

hvor $i = 1, 2$ og $t = 1, 2, 3, 4$.

2) Variabel 2:

Hvorvidt en skal produsere en gitt produktfamilie for et gitt kvartal eller ikke:

$$Y_{it} \;=\; \begin{cases} 1 & , \quad \text{dersom vi produserer produktfamilie } i \text{ i kvartal } t \\ 0 & , \quad \text{hvis ikke} \end{cases} \tag{34}$$

hvor $i = 1, 2$ og $t = 1, 2, 3, 4$.

3) Variabel 3:

Antall tonn overlagret fra et kvartal til neste av hver produktfamilie:

$$I_{it} \;=\; \text{antall tonn overlagret fra kvartal } t \text{ til } t+1 \text{ av produktfamilie } i \tag{35}$$

hvor $i = 1, 2$ og $t = 1, 2, 3$.

c) Målfunksjonen C er gitt ved totale lager, setup - og strømkostnader:

$$\underline{\underline{C \;=\; \sum_{i=1}^{2}\sum_{t=1}^{3} H_i I_{it} \;+\; \sum_{i=1}^{2}\sum_{t=1}^{4} S_{it} Y_{it} \;+\; \sum_{i=1}^{2}\sum_{t=1}^{4} C_{it} X_{it}}} \tag{36}$$

d) Vi har tre føringer:

1) Føring 1: [4]

Lagerbalansen må være oppfylt:

$$I_{it-1} + X_{it} - D_{it} \;=\; I_{it} \tag{37}$$

hvor $i = 1, 2$ og $t = 1, 2, 3$.

2) Føring 2:

Ingen produksjon → ingen tonn produsert. På logisk form:

$$\text{Hvis} \quad \underbrace{Y_{it} \;=\; 0}_{\text{ingen produksjon familie } i} \quad \text{så er} \quad \underbrace{X_{it} \;=\; 0}_{\text{ingen tonn produsert familie } i} \tag{38}$$

hvor $\underbrace{i = 1, 2}_{\text{produktfamilie}}$ og $\underbrace{t = 1, 2, 3, 4}_{\text{kvartal}}$, eller på matematisk form (ikke-lineær):

$$X_{it}(1 - Y_{it}) \;=\; 0 \tag{39}$$

3) Føring 3:

Maksimal produksjonskapasitet totalt for hvert kvartal (i antall timer):

$$R_i X_{it} \leq \overline{R}_i \tag{40}$$

hvor $i = 1, 2$.

[4] Vårt problem dreier seg om lager over flere peridoer. Derfor må det være en lagerbalanseligning inne i bildet. I testeksamen for 2017, derimot, var det kun èn periode. Da behøves det ingen balanseligning.

e) Vi utvider modellen til å inkludere den oppgitte nye informasjonen:

Nye data:

$$\overline{Z} \quad = \quad \text{maksimalt antall tonn flytende aluminium som kan produseres per kvartal} \tag{41}$$

$$Q_i \quad = \quad \text{antall tonn produsert for familie } i \text{ fra 1 tonn flytende aluminum, hvor } i = 1, 2 \tag{42}$$

Nye variabler:

Vi har en ny type variabel:

For hvert kvartal, skal de bestemme antall tonn flytende aluminium som skal gå til produksjonen av primæraluminium, og antall tonn som skal gå til produksjonen av støperiprodukter:

$$Z_{it} \quad = \quad \text{antall tonn flytende aluminium som går til produksjon av familie } i \text{ i kvartal } t \tag{43}$$

hvor $i = 1, 2$ og $t = 1, 2, 3, 4$.

Vi har to nye føringer:

1) Ny føring 1:

Antall tonn flytende aluminium produsert per kvartal må være mindre enn maksimal kapasitet:

$$Z_{1t} + Z_{2t} \;\leq\; \overline{Z} \tag{44}$$

hvor $t = 1, 2, 3, 4$.

2) Ny føring 2:

Produksjonsforholdet mellom flytende aluminium og gitt familie må være oppfylt:

$$X_{it} \;=\; Q_i Z_{it} \tag{45}$$

hvor $i = 1, 2$ og $t = 1, 2, 3, 4$.

■

Oppgave 4: (Wagner-Whitin, 25 %)

a) Vi fortsetter Wagner-Whitin algoritmen med subproblemet med tre perioder:

Periode 3: (subproblem de 3 første periodene)

$$\underline{C_3^*} = \min\Big[C_{100} \ , \ C_{x10} \ , \ C_{xx1} \Big] \tag{46}$$

$$= \min\Big[(\textit{siste bestilling i 1. periode}) \ , \ (\textit{siste bestilling i 2. periode}) \ , \tag{47}$$

$$(\textit{siste bestilling i 3. periode}) \Big]$$

$$= \min\Big[C_{10} + 2H_1 D_{13} + C_{11} D_{13} \ , \ C_{x1} + H_1 D_{13} + C_{12} D_{13} \ , \ C_2^* + S_1 + C_{13} D_{13} \Big] \tag{48}$$

$$= \min\Big[80\,750\,000 + 2 \cdot 125 \cdot 80\,000 + 1250 \cdot 80\,000 \ ,$$

$$83\,500\,000 + 125 \cdot 80\,000 + 1400 \cdot 80\,000 \ , \tag{49}$$

$$80\,750\,000 + 2\,000\,000 + 1300 \cdot 80\,000 \Big]$$

$$= \min\Big[200\,750\,000 \ , \ 205\,500\,000 \ , \ \underline{186\,750\,000} \Big] \tag{50}$$

$$= \underline{186\,750\,000 \text{ NOK}} \tag{51}$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er C_{xx1}.

Vi vet da at Horisontteoremet kutter periode 1 og 2.

<u>Periode 4</u>: (subproblem de 4 første periodene)

Siden vi skal ha et sluttlager på $I_{14} = 20\,000$ tonn så blir etterspørselen:

$$\underline{D'_{14}} \;=\; D_{14} + I_{14} \;=\; \Big(54\,000 + 20\,000\Big) \text{ tonn} \;=\; \underline{74\,000 \text{ tonn}} \tag{52}$$

Dermed:

$$\underline{C^*_4} \;=\; \min\Big[C_{xx10}\;,\;C_{xxx1}\Big] \tag{53}$$

$$=\; \min\Big[(\textit{siste bestilling i 3. periode})\;,\;(\textit{siste bestilling i 4. periode})\Big] \tag{54}$$

$$=\; \min\Big[C_{xx1} + H_1 D'_{14} + C_{13} D'_{14}\;,\;C^*_3 + S_1 + C_{14} D'_{14}\Big] \tag{55}$$

$$=\; \min\Big[186\,750\,000 + 125 \cdot 74\,000 + 1300 \cdot 74\,000$$

$$186\,750\,000 + 2\,000\,000 + 1200 \cdot 74\,000\Big] \tag{56}$$

$$=\; \min\Big[292\,200\,000\;,\;\underline{277\,550\,000}\Big] \tag{57}$$

$$=\; \underline{277\,550 \text{ NOK}} \tag{58}$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er C_{xxx1}. Vi finner de andre bestillingene ved å hoppe til korrekt delproblem:

- C_{xxx1}, siden siste bestilling skjer i uke 4. Vi hopper dermed til delproblem 3.
- C_{xx11}, siden siste bestilling skjer i uke 3 for delproblem 3. Vi hopper til delproblem 2.
- C_{1011}, siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 2.

Altså har vi vist at:

$$\underline{\underline{C^*_4 \;=\; C_{1011} = 277\,550\,000 \;\; \text{NOK}}} \qquad \text{q.e.d.} \tag{59}$$

b) Optimal bestillingsplan leser vi direkte ut fra C_{1011}:

Bestillingsplanen: (Y_t-variablene)

$$Y_1 = 1 \tag{60}$$
$$Y_2 = 0 \tag{61}$$
$$Y_3 = 1 \tag{62}$$
$$Y_4 = 1 \tag{63}$$

Produksjonsmengder:

Vi finner X_t-variablene ved å bruke teoremet om "*Dominante produksjonsplaner*", kun hele etterspørselsbehov.

$$\underline{\underline{X_{11}}} = D_{11} - I_{10} + D_{12} = \Big(40\,000 - 10\,000 + 30\,000\Big) \text{ tonn} = \underline{\underline{60\,000 \text{ tonn}}} \tag{64}$$
$$\underline{\underline{X_{12}}} = \underline{\underline{0}} \tag{65}$$
$$\underline{\underline{X_{13}}} = D_{13} = \underline{\underline{80\,000 \text{ tonn}}} \tag{66}$$
$$\underline{\underline{X_{14}}} = D_{14} + I_{14} = \Big(54\,000 + 20\,000\Big) \text{ tonn} = \underline{\underline{74\,000 \text{ tonn}}} \tag{67}$$

Lagermengder:

Fra X_t-variablene finner vi optimale lagermengder:

$$\underline{\underline{I_{11}}} = D_{12} = \underline{\underline{30\,000 \text{ tonn}}} \tag{68}$$
$$\underline{\underline{I_{12}}} = \underline{\underline{0}} \tag{69}$$
$$\underline{\underline{I_{13}}} = \underline{\underline{0}} \tag{70}$$
$$\underline{\underline{I_{14}}} = \underline{\underline{20\,000 \text{ tonn}}} \qquad \text{(oppgitt i oppgaven)} \tag{71}$$

c) Vi har 4 ulikheter vi må sjekke er mindre enn 200 000 tonn:

$t = 1$:

$$0.98X_{11} + 0.96X_{21} \;=\; 0.98 \cdot 60\,000 + 0.96 \cdot 65\,000 \;=\; \underbrace{121\,200 \;\leq\; 200\,000}_{\text{OK}} \tag{72}$$

$t = 2$:

$$0.98X_{12} + 0.96X_{22} \;=\; 0.98 \cdot 0 + 0.96 \cdot 120\,000 \;=\; \underbrace{115\,200 \;\leq\; 200\,000}_{\text{OK}} \tag{73}$$

$t = 3$:

$$0.98X_{13} + 0.96X_{23} \;=\; 0.98 \cdot 80\,000 + 0.96 \cdot 0 \;=\; \underbrace{78\,400 \;\leq\; 200\,000}_{\text{OK}} \tag{74}$$

$t = 4$:

$$0.98X_{14} + 0.96X_{24} \;=\; 0.98 \cdot 74\,000 + 0.96 \cdot 105\,000 \;=\; \underbrace{173\,320 \;\leq\; 200\,000}_{\text{OK}} \tag{75}$$

Altså alle kapasitetsføringene er oppfylt.

Konklusjon: [5]

Siden Wagner-Whitin algoritmen løser to delproblem som er
mindre restriktert enn det fulle problemet (med kapasitetsføringene)
vil Wagner-Whitin alltid gi en billigere plan (man kanskje ikke en mulig plan).

Siden vi har vist at Wagner-Whitin planene likevel oppfyller kapasitetsføringene
kan vi konkludere at Wagner-Whitin løsningene faktisk gir optimale løsninger også når
kapasitetsføringene inkluderes.

∎

[5] Denne siste konklusjonen er *ikke* en del av sensuren. Den er bare med for kompletthetens skyld.

Kontinuasjonseksamen 2017

LØSNING: Kontinuasjonseksamen våren 2017

"*SCM200 Lager -og Produksjonsstyring*", vår 2017

Oppgave 1: (prognostisering, 25 %)

a) Vi har fra formelen for eksponensiell glatting at[1]:

$$F_2 = X_1 = 700 \tag{1}$$

$$F_3 = \theta F_2 + (1-\theta)X_2 = 0.2 \cdot 700 + 0.8 \cdot 690 = 692 \tag{2}$$

$$F_4 = \theta F_3 + (1-\theta)X_3 = 0.2 \cdot 692 + 0.8 \cdot 710 = 706.4 \tag{3}$$

$$F_5 = \theta F_4 + (1-\theta)X_4 = 0.2 \cdot 706.4 + 0.8 \cdot 690 = 693.3 \tag{4}$$

$$F_6 = \theta F_5 + (1-\theta)X_5 = 0.2 \cdot 693.3 + 0.8 \cdot 740 = 730.7 \tag{5}$$

$$F_7 = \theta F_6 + (1-\theta)X_6 = 0.2 \cdot 730.7 + 0.8 \cdot 700 = 706.1 \tag{6}$$

Prognosen for 2017 blir dermed $\underline{\underline{F_7 = 706.13}}$ tusen tonn alumina.

[1] Vi har brukt den stegvise formelen for eksponensiell glatting. Alternativt kunne en ha brukt den autokorrigerende formelen.

b) Vi har 5 historiske prognoser: $F_2 \dots F_6$. MFE er da gitt ved:[2]

$$\underline{\underline{MFE}} = \frac{1}{T-s+1}\sum_{t=2}^{6} E_t \tag{7}$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{t=2}^{6} E_t$$

$$= \frac{1}{5}\Big((690-700) + (710-692) + (690-706.4) \tag{8}$$

$$+ (740-693.3) + (700-730.7)\Big) \tag{9}$$

$$= \underline{\underline{1.52}} \tag{10}$$

MFE er et mål på om det forekommer en nedadstigende eller oppadstigende trend i observasjonene, basert på metoden brukt.

Siden $MFE = 1.52$ er svakt positiv, gir dette en svakt økende trend. Hvis vi videre ser på observasjonene, ser vi at X_{2015} hadde en markant økning i etterspørsel enn for de andre årene. Dette forklarer den positive trenden.

Når vi har en avvikende økning i 2015, vil denne verdien øke verdien på MFE. Hadde vi fjernet denne verdien ville MFE minket. Vi kan ikke konkludere at datasettet har en økende trend, siden verdien på MFE er forhøyet bare pga. et avvikende år. Vi må ha flere år som viser en økende trend.

[2]Vi har her satt $T = 6$ og $s = 2$, at $s = 2$ kommer av at $ES(\theta)$ starter på $s = 2$, se kompendium.

c) Vi har følgende to fordeler:

1. Vi må ikke *lagre* alle observasjonene til enhver tid for å beregne MFE på nytt.
2. Formelen er enklere å beregne enn definisjonen, siden vi ikke bruker alle observasjonene i beregningen.

d) Vi bruker den oppgitte oppdateringsformelen til å beregne ny verdi for MFE_7: [3]

$$\underline{\underline{MFE_7}} = \frac{(6-1)MFE_6 + (X_7 - F_7)}{6} \tag{11}$$

$$= \frac{5 \cdot 1.52 + (750 - 706.1)}{6} \tag{12}$$

$$= \underline{\underline{8.58}} \tag{13}$$

MFE har nå økt kraftig, og hentyder sterkere til en oppadstigende trend. Hydro bør derfor vurdere å bytte til en trendbasert prognosemetode.

■

[3] Vi har her satt $t = 6$.

Oppgave 2: (EOQ, 25 %)

a) Antakelsen om *total leveranse*, betyr at hele bestillingen kommer på en gang. Dette er tilfelle her *forutesett* at tankskipet har nok kapasitet til hele bestillingen.

Vi må derfor sjekke om den optimale ordrebestillingen ligger under kapasitetsgrensen til skipet (30 000 tonn Alumina):

EOQ-formelen gir:

$$\underline{\underline{X^*}} = \sqrt{\frac{2DS}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 717\,000 \cdot 800\,000}{0.1 \cdot 15\,000}} = \underline{\underline{27\,655 \text{ tonn}}} \quad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{14}$$

som er optimal bestillingsmengde for alumina, hvor vi har brukt at $H = iC$.

Vi kan dermed konkludere at antakelsen om total leveranse er oppfylt, siden EOQ ligger under kapasitetsgrensen til tankskipet.

b) Med *omløpstid*, menes tiden fra lageret er fylt til lageret er tomt.

Optimal omløpstid O^* i antall uker er gitt ved:

$$\underline{O^*} = 52\,\frac{X^*}{D} = 52\,\frac{27\,655}{717\,000} = \underline{2.0} \tag{15}$$

Det tar altså $\underline{\underline{\text{2 uker}}}$ mellom hver gang lageret blir tomt.

c) Sikkerhetslageret er gitt ved:

$$\underline{\underline{SS}} = z_{99}\sigma\sqrt{L} \tag{16}$$

$$= 2.33 \cdot 50\,000 \cdot \sqrt{5/365} \tag{17}$$

$$= \underline{\underline{13\,635 \;\; \text{tonn alumina}}} \tag{18}$$

Legg merke til at vi har skrevet om ledetiden til antall år, siden etterspørselen er oppgitt i antall tusen tonn Alumina per *år*.

Bestillingspunktet er dermed gitt ved:

$$\underline{\underline{R}} = DL + SS \tag{19}$$

$$= 717000 \cdot \frac{5}{365} + 13\,635 \tag{20}$$

$$= \underline{\underline{23\,457 \;\; \text{tonn alumina}}} \tag{21}$$

Hydro bestiller ny leveranse når lageret ved Årdal verk har nådd 23 457 tonn.

■

Oppgave 3: (Fasilitetsdesign, 25 %)

a) Problemet er et lokasliseringsproblem siden vi har 2 potensielle lokasjoner for mellomlageret, men hvor kun ett av dem skal benyttes.

b) Problemet er ikke et allokeringsproblem siden vi har kun 1 mellomlager som skal tjene alle de 3 produksjonshallene.

c) Vi har følgende indekseringer:

- de mulige lokasjonene for mellomlageret indekseres ved $i = 1, 2$
- produksjonshallene indekseres ved $j = 1, 2, 3$

Vi definerer følgende data: [4]

$$D_j = \text{årlig etterspørsel etter karbonanoder ved produksjonshall } j\text{, hvor } j = 1, 2, 3 \tag{22}$$

$$T_{ij} = \text{rutekostnad fra mulig lokasjon } i \text{ til produksjonshall } j\ i\text{, hvor } i = 1, 2 \text{ og } j = 1, 2, 3 \tag{23}$$

[4] Husk at data er størrelsen vi ikke kan påvirke.

d) Vi har kun en variabel:

Hvorvidt en lagerlokasjon i skal benyttes eller ikke:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi bruker mulig lokasjon } i \text{ for mellomlageret} \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases} \tag{24}$$

hvor $i = 1, 2$.

e) Målfunksjonen T er gitt ved totale årlige transporttider:

$$\underline{\underline{T = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} D_j T_{ij} Y_i}} \tag{25}$$

f) Vi har kun en føring:

Kun en av de to mulige lokasjonene for mellomlageret skal benyttes:

$$\underline{\underline{\sum_{i=1}^{2} Y_i = 1}} \tag{26}$$

g) Problemet er nå også et allokeringsproblem, siden vi må bestemme hvilke av de 5 lagrene i tillegg til mellomlageret som skal tjene produksjonshallene med anoder.

h) Vi utvider modellen til å inkludere muligheten for direkte transport mellom lager og produksjonshall:

Ny indeksering:

Vi har følgende ny indeksering:

de 5 eksisterende lagrene indekseres ved $k = 1, 2, 3, 4, 5$

Nye data:

$$Q_{kj} = \text{transporttid mellom lager } k \text{ og produksjonshall } j \text{ hvor } k = 1,2,3,4,5 \text{ og } j = 1,2,3. \tag{27}$$

Nye variabler:

Vi må spesifisere hvor mye vi leverer fra hvert lager til produksjonshallene, inkludert mellomlageret:

$$X_{kj} = \text{antall anoder levert fra lager } k \text{ til produksjonshall } j \text{ hvor } k = 1,2,3,4,5 \text{ og } j = 1,2,3. \tag{28}$$

$$Z_{ij} = \text{antall anoder levert fra lokasjon } i \text{ for mellomlageret til produksjonshall } j \text{ hvor } i = 1,2 \text{ og } j = 1,2,3. \tag{29}$$

Legg merke til at transportren fra lagrene til mellomlageret *ikke* inkluderes! Dette kan komme av at denne transporttiden forekommer når det *ikke* er behov for å bytte ut en anode. (En slik transport vil ikke sinke produksjonen av aluminium.

Ny målfunksjon:

Vi inkluderer muligheten for direkte transport mellom lagrene og produksjonshallene, i tillegg til transporten fra de mulige lokasjonene for mellomlagret.

Den nye målfunksjonen for totale årlige transprottider blir dermed:

$$\underline{\underline{T \; = \; \sum_{k=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} Q_{kj}X_{kj} \; + \; \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} T_{ij}Z_{ij}}} \tag{30}$$

Vi har to nye føringer:

1) Ny føring 1:

   Etterspørsel oppfylt:
   Vi må oppfylle den *totale* etterspørselen for anoder ved produksjonshallene:

$$D_j \; = \; \sum_{k=1}^{5} X_{kj} + \sum_{i=1}^{2} Z_{ij} \tag{31}$$

   hvor $j = 1, 2, 3$.

2) Ny føring 2:

Logisk sammenheng mellom Z-variablene og Y-variablene:
Lokasjon for mellomlager ikke benyttet → ingen leveranse fra lokasjonen. På logisk form:

$$\text{Hvis} \quad \underbrace{Y_i \ = \ 0}_{\text{intet lager}} \quad \text{så er} \quad \underbrace{Z_{ij} \ = \ 0}_{\text{ingen leveranse}} \tag{32}$$

for alle lokasjoner for mallomlageret $i = 1, 2$ og alle produksjonshaller $j = 1, 2, 3$:

$$Z_{ij}(1 - Y_i) \ = \ 0 \tag{33}$$

■

Oppgave 4: (Wagner-Whitin, 25 %)

a) Omstillingskostnaden er:

$$\underline{S} = 15 \cdot 10\,000 \text{ NOK} = \underline{150\,000 \text{ NOK}} \tag{34}$$

Lagerkostnaden:

$$H = 200 \text{ NOK per anode per uke} \tag{35}$$

som oppgitt i oppgaveteksten.

Startlager:

$$I_0 = 150 \tag{36}$$

Sluttlager:

$$I_6 = 300 \tag{37}$$

anoder, som også er oppgitt i oppgaveteksten.

Periode 1: (subproblem med kun første periode)

Etterspørselen i uke 1 er $D_1 = 600$ anoder.
Det initielle lageret $I_0 = 150$ er ikke stort nok til å dekke etterspørselen så vi må ha produksjon i første periode:

$$\underline{C_1^*} = S = \underline{150\,000 \text{ NOK}} \tag{38}$$

Periode 2: (subproblem de 2 første periodene)

Dominante produksjonsplaner gir *to* mulige optimale løsninger: C_{10} og C_{11}.
Vi regner ut disse verdiene:

$$\begin{aligned}
\underline{C_2^*} &= \min\Big[C_{10} \ , \ C_{x1} \Big] && (39)\\
&= \min\Big[(\textit{siste bestilling i 1. periode}) \ , \ (\textit{siste bestilling i 2. periode}) \Big] && (40)\\
&= \min\Big[(C_1^* + H \cdot D_2) \ , \ (C_1^* + S) \Big] && (41)\\
&= \min\Big[150\,000 + 200 \cdot 850 \ , \ 150\,000 + 150\,000 \Big] && (42)\\
&= \min\Big[320\,000 \ , \ \underline{300\,000} \Big] && (43)\\
&= \underline{300\,000 \text{ NOK}} && (44)
\end{aligned}$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er C_{11}.

Vi vet da at Horisontteoremet kutter første periode.

Periode 3: (subproblem de 3 første periodene)

$$\underline{C_3^*} = \min\left[C_{x10}\ ,\ C_{xx1}\right] \tag{45}$$

$$= \min\left[(\textit{siste bestilling i 2. periode})\ ,\ (\textit{siste bestilling i 3. periode})\right] \tag{46}$$

$$= \min\left[(C_{x1} + H \cdot D_3)\ ,\ (C_2^* + S)\right] \tag{47}$$

$$= \min\left[(300\,000 + 200 \cdot 800)\ ,\ (300\,000 + 150\,000)\right] \tag{48}$$

$$= \min\left[460\,000\ ,\ \underline{450\,000}\right] \tag{49}$$

$$= \underline{450\,000 \text{ NOK}} \tag{50}$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er C_{xx1}.

Vi vet da at Horisontteoremet kutter kutter periode 1 og 2.

<u>Periode 4</u>: (subproblem de 4 første periodene)

$$
\begin{aligned}
\underline{C_4^*} &= \min\Big[C_{xx10} \ , \ C_{xxx1} \Big] && (51)\\
&= \min\Big[(\textit{siste bestilling i 3. periode}) \ , \ (\textit{siste bestilling i 4. periode}) \Big] && (52)\\
&= \min\Big[(C_{xx1} + H \cdot D_4) \ , \ (C_3^* + S) \Big] && (53)\\
&= \min\Big[(450\,000 + 200 \cdot 850) \ , \ (450\,000 + 150\,000) \Big] && (54)\\
&= \min\Big[620\,000 \ , \ \underline{600\,000} \Big] && (55)\\
&= \ \underline{600\,000 \text{ NOK}} && (56)
\end{aligned}
$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er C_{xxx1}.

Vi vet da at Horisontteoremet kutter periode 1, 2 og 3.

Periode 5: (subproblem de 5 første periodene)

Siden horisontteoremet kuttet periodene 1, 2 og 3 i forrige steg, kan vi nå starte fra periode 4:

$$\underline{C_5^*} \;=\; \min\Big[\, C_{xxx10} \;,\; C_{xxxx1} \,\Big] \tag{57}$$

$$=\; \min\Big[\, (\textit{siste bestilling i 4. periode}) \;,\; (\textit{siste bestilling i 5. periode}) \,\Big] \tag{58}$$

$$=\; \min\Big[\, C_{xxx1} + H \cdot D_5 \;,\; C_4^* + S \,\Big] \tag{59}$$

$$=\; \min\Big[\, 600\,000 + 200 \cdot 600 \;,\; 600\,000 + 150\,000 \,\Big] \tag{60}$$

$$=\; \min\Big[\, \underline{720\,000} \;,\; 750\,000 \,\Big] \tag{61}$$

$$=\; \underline{720\,000 \text{ NOK}} \tag{62}$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er C_{xxx10}.

Vi vet da at Horisontteoremet kutter ingen nye perioder.

<u>Periode 6</u>: (det fulle problemet)

Siden vi har et krav om sluttlager på $I_6 = 300$ anoder så legger vi disse til i etterspørselen i periode 6, dvs.:

$$\underline{\tilde{D}_6} \;=\; D_6 + I_6 \;=\; 800 + 300 \;=\; \underline{1100} \tag{63}$$

Dermed:

$$\underline{C_6^*} \;=\; \min\Big[\, C_{xxx100} \;,\; C_{xxxx10} \;,\; C_{xxxxx1} \,\Big] \tag{64}$$

$$=\; \min\Big[\, (\textit{siste bestilling i 4. periode}) \;,\; (\textit{siste bestilling i 5. periode}) \;, \tag{65}$$

$$(\textit{siste bestilling i 6. periode}) \Big]$$

$$=\; \min\Big[\, (C_{xxx10} + 2 \cdot H \cdot \tilde{D}_6) \;,\; (C_{xxxx1} + H \cdot \tilde{D}_6) \;,\; (C_5^* + S) \Big] \tag{66}$$

$$=\; \min\Big[\, (720\,000 + 2 \cdot 200 \cdot 1100) \;,\; (750\,000 + 200 \cdot 1100) \;,\; (720\,000 + 150\,000) \Big] \tag{67}$$

$$=\; \min\Big[\, 1\,160\,000 \;,\; 970\,000 \;,\; \underline{870\,000} \Big] \tag{68}$$

$$=\; \underline{870\,000 \text{ NOK}} \tag{69}$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er C_{xxxxx1}.

Oppsummert:

- C_{xxxxx1}, siden siste bestilling skjer i uke 6. Vi hopper dermed til delproblem 5.
- C_{xxx101}, siden siste bestilling skjer i uke 4 for delproblem 5. Vi hopper til delproblem 3.
- C_{xx1101}, siden siste bestilling skjer i uke 3 for delproblem 3.
- C_{x11101}, siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 1.
- C_{111101}, siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 1.

<u>Optimal løsning:</u>

$$\underline{\underline{C^*}} = C_{111101} = \underline{\underline{870\,000 \ \text{ NOK}}} \tag{70}$$

<u>Bestillingsplanen:</u> (Y_t-variablene)

$$Y_1 = 1 \tag{71}$$
$$Y_2 = 1 \tag{72}$$
$$Y_3 = 1 \tag{73}$$
$$Y_4 = 1 \tag{74}$$
$$Y_5 = 0 \tag{75}$$
$$Y_6 = 1 \tag{76}$$

<u>Produksjonsmengder:</u>

Vi finner X_t-variablene ved å bruke teoremet om "*Dominante produksjonsplaner*", kun hele etterspørselsbehov.

$$\underline{\underline{X_1}} = D_1 - I_0 = 600 - 150 = \underline{\underline{450}} \tag{77}$$

$$X_2 = D_2 = \underline{\underline{850}} \tag{78}$$

$$X_3 = D_3 = \underline{\underline{800}} \tag{79}$$

$$\underline{\underline{X_4}} = D_4 + D_5 = 850 + 600 = \underline{\underline{1\,450}} \tag{80}$$

$$X_5 = 0 \tag{81}$$

$$\underline{\underline{X_6}} = D_6 + I_6 = 800 + 300 = \underline{\underline{1\,100}} \tag{82}$$

<u>Lagermengder:</u>

Fra X_t-variablene finner vi optimale lagermengder:

$$\underline{\underline{I_1}} = 0 \tag{83}$$

$$\underline{\underline{I_2}} = 0 \tag{84}$$

$$I_3 = 0 \tag{85}$$

$$\underline{\underline{I_4}} = D_5 = \underline{\underline{600}} \tag{86}$$

$$I_5 = 0 \tag{87}$$

b) I oppgaven skal vi *femskynde* etterspørsel fra periode 6 til periode 5 inntil lageret fra periode 4 til periode 5 blir så stort at det er billigere å produsere i periode 5.

Vi definerer den ukjente variabelen ved:

$$X \;=\; \text{antall anoder fremskyndet fra periode 6 til periode 5} \tag{88}$$

Vi må se på sluttresultatet for delproblem 5 hvor vi nå substituerer D_5 med $\tilde{D}_5 = D_5 + X = 600 + X$:

$$\underline{C_5^*} \;=\; \min\left[C_{xxx10} \;,\; C_{xxxx1} \right] \tag{89}$$

$$= \min\left[(\textit{siste bestilling i 4. periode}) \;,\; (\textit{siste bestilling i 5. periode}) \right] \tag{90}$$

$$= \min\left[C_{xxx1} + H \cdot \tilde{D}_5 \;,\; C_4^* + S \right] \tag{91}$$

$$= \min\left[600\,000 + 200 \cdot (600 \;+\; X) \;,\; 600\,000 + 150\,000 \right] \tag{92}$$

$$= \min\left[720\,000 \;+\; 200 \cdot X \;,\; 750\,000 \right] \tag{93}$$

Dersom siste bestilling i periode 5 skal bli optimalt krever vi at:

$$720\,000 \;+\; 200 \cdot X \;\geq\; 750\,000 \tag{94}$$

$$\Updownarrow \tag{95}$$

$$X \;\geq\; \frac{720\,000 \;-\; 720\,000}{2} = \frac{300\,000}{200} = 150 \tag{96}$$

Dersom vi fremskynder produksjonen av 150 anoder fra periode 6 til periode 5, så får vi at nye etterspørsler er gitt ved:

$$\tilde{D}_5 \;=\; D_5 + X = 600 + 150 = 750 \tag{97}$$

$$\tilde{\tilde{D}}_6 \;=\; D_6 - X + I_6 = 800 - 150 + 300 = 950 \tag{98}$$

Vi vet at delproblem 5 nå får optimal løsning $C_5^* = C_{xxxx1} = 750\,000$ NOK som påkrevd i ' oppgaven.

Det siste vi må sjekke er at delproblem 6 nå gir $= C_{xxxxx1}$ som før:[5]

$$
\begin{aligned}
\underline{C_6^*} &= \min\Big[C_{xxx100} \;,\; C_{xxxx10} \;,\; C_{xxxxx1} \Big] && (99)\\
&= \min\Big[(\textit{siste bestilling i 4. periode}) \;,\; (\textit{siste bestilling i 5. periode}) \;, && (100)\\
&\qquad (\textit{siste bestilling i 6. periode}) \Big] \\
&= \min\Big[(C_{xxx10} + 2 \cdot H \cdot \tilde{\tilde{D}}_6) \;,\; (C_{xxxx1} + H \cdot \tilde{\tilde{D}}_6) \;,\; (C_5^* + S) \Big] && (101)\\
&= \min\Big[(750\,000 + 2 \cdot 200 \cdot 950) \;,\; (750\,000 + 200 \cdot 950) \;,\; (750\,000 + 150\,000) \Big] && (102)\\
&= \min\Big[1\,130\,000 \;,\; 940\,000 \;,\; \underline{900\,000} \Big] && (103)\\
&= \underline{900\,000 \text{ NOK}} && (104)
\end{aligned}
$$

Vi konkluderer med at dersom vi fremskynder 150 anoder fra periode 6 til periode 5, så får vi ingen stans i produksjonen

■

[5] Selve verdien på løsningen blir dermed 30 000 NOK dyrere, men det er likevel bra for Årdal siden produksjonen ikke får stans.