H-2016

MAT100

Matematikk

Løsningsforslag til eksamensoppgaver 2012 - 2016

Per Kristian Rekdal

Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

Innhold

Forord

Løsningsforslag:

Dette er en samling av løsningsforslag til gamle eksamensoppgaver i emnet "*MAT100 Matematikk*" ved Høgskolen i Molde. Samlingen inneholder løsningsforslag tilhørende totalt 8 eksamensoppgaver, i perioden fra og med 2012 og frem til i dag.

Det finnes også en tilhørende samling med selve eksamensoppgavene til disse løsningforslagene. Samlingen med eksamensoppgaver finnes i et eget hefte, separert fra dette løsningsheftet.

Gratis:

Både samlingen med oppgaver og tilhørende samling med komplette løsningsforslag kan lastes ned gratis via Høgskolen i Molde sin åpne kursportal www.himoldeX.no.

Hvordan bruke denne samlingen av tidligere eksamensoppgaver med løsningsforslag?:

Det anbefales å regne gjennom gamle eksamensoppgaver før eksamen. Dersom man gjør det så får man en god pekepinn på hva som kreves på eksamensdagen. Sett av 4 timer, prøv så godt du kan uten løsningsforslag. Etter at de 4 timene er over, rett din egen eksamensbesvarelse. Og sett gjerne karakter på deg selv.

Ikke bare i eksamensperioden, men også ellers i semesteret kan det være lurt å regne gjennom gamle eksamensoppgaver. Men gå gjennom teorien før man gjør oppgaver. Da får man bedre utbytte av oppgaveløsningen.

Videoer:

Komplette sett med forelesningsvideoer fra 2013, 2014 og 2015 finnes på www.himoldeX.no.
I tillegg finnes kortvideoer til majoriteten av pensum.

Per Kristian Rekdal

Kapittel 1

LØSNING: Eksamen 11. des. 2012

"*MAT100 Matematikk*"

Oppgave 1: (kostnad, inntekt og fortjeneste)

a) Total enhetskostnad, dvs. kostnad per bereder:

$$\underline{\underline{TEK(x)}} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{K(x)}{x} \tag{1.1}$$

$$= \frac{ax^2 + bx + c}{x} = \underline{\underline{ax + b + \frac{c}{x}}} \quad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{1.2}$$

b) Den deriverte av $TEK(x)$:

$$\underline{\frac{dTEK(x)}{dx}} = \frac{d}{dx}\left(ax + b + \frac{c}{x} \right) = \underline{a - \frac{c}{x^2}} \tag{1.3}$$

Minimum til $TEK(x)$ finnes ved å derivere og deretter sette den deriverte lik null:

$$\frac{dTEK(x)}{dx} = 0 \tag{1.4}$$

$$a - \frac{c}{x^2} = 0 \quad \Big| \cdot x^2 \tag{1.5}$$

$$ax^2 - c = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{a} \tag{1.6}$$

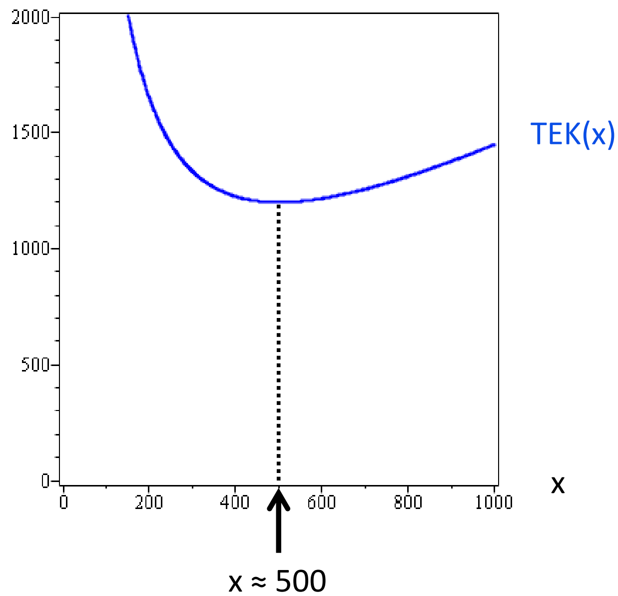
$$x^2 - \frac{c}{a} = 0 \tag{1.7}$$

$$\underline{\underline{x = \sqrt{\frac{c}{a}}}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{1.8}$$

c) Setter inn numeriske verdier:

$$\underline{\underline{x}} = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{250\,000\ \cancel{\text{NOK}}}{1\ \cancel{\text{NOK}} \cdot (\text{år})^2}} = \underline{\underline{500\ \frac{1}{\text{år}}}} \tag{1.9}$$

d) Markerer minimum av $TEK(x)$ på figuren fra vedlegg A:



Figur 1.1: Minimum av $TEK(x)$ er markert på figuren.

Ved å sammenligne lign.(1.9) og fig.(1.1) ser vi at den analytiske og den grafiske løsningen er sammenfallende.

e) Grensekostnaden finnes ved å derivere kostnaden $K(x)$:

$$\underline{\underline{\frac{d\,K(x)}{dx}}} = \frac{d}{dx}\left(ax^2 + bx + c \right) \tag{1.10}$$

$$= \underline{\underline{2ax + b}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{1.11}$$

f) Se vedlegg A.

g) Av figuren i vedlegg A ser vi at grafen til $TEK(x)$ og grafen til $\frac{dK(x)}{dx}$ skjærer hverandre ved $\underline{\underline{x = 500 \;\; 1/\text{år}}}$.

h) Skjæringspunktet mellom $TEK(x)$ og $\frac{dK(x)}{dx}$ finnes analytisk ved å sette funksjonene lik hverandre:

$$TEK(x) = \frac{dK(x)}{dx} \tag{1.12}$$

$$ax + \cancel{b} + \frac{c}{x} = 2ax + \cancel{b} \tag{1.13}$$

$$-ax = -\frac{c}{x} \qquad \Big| \cdot (-x) \tag{1.14}$$

$$ax^2 = c \qquad \Big| \cdot \frac{1}{a} \tag{1.15}$$

$$x^2 = \frac{c}{a} \tag{1.16}$$

$$\underline{\underline{x = \sqrt{\frac{c}{a}}}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{1.17}$$

i) Bedriftens totale resultat $TR(x)$:

$$\underline{\underline{TR(x)}} = I(x) - K(x) \tag{1.18}$$

$$= x \cdot p(x) - K(x) \tag{1.19}$$

$$= x \cdot (Ax + B) - (ax^2 + bx + c) \tag{1.20}$$

$$= \underline{\underline{(A-a)x^2 + (B-b)x - c}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{1.21}$$

j) Den deriverte av $TEK(x)$:

$$\underline{\frac{dTR(x)}{dx}} = \frac{d}{dx}\Big((A-a)x^2 + (B-b)x - c \Big) = \underline{2(A-a)x \ + \ (B-b)} \tag{1.22}$$

Maksimum til $TR(x)$ finnes ved å derivere og sette den deriverte lik null:

$$\frac{dTR(x)}{dx} = 0 \tag{1.23}$$

$$2(A-a)x \ + \ (B-b) = 0 \tag{1.24}$$

$$2(A-a)x = -(B-b) \quad \Big| \cdot \frac{1}{2(A-a)} \tag{1.25}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{b-B}{2(A-a)}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{1.26}$$

k) Den numeriske verdien av lign.(1.26):

$$\underline{\underline{x}} = \frac{b-B}{2(A-a)} = \frac{(200-3\,200)\ \cancel{\text{NOK}} \cdot \cancel{\text{år}}}{2(-4-1)\ \cancel{\text{NOK}} \cdot (\text{år})^{\cancel{2}}} = \underline{\underline{300 \ \frac{1}{\text{år}}}} \tag{1.27}$$

l) <u>Nei,</u> produksjonskvantumet som minimerer enhetskostnaden $TEK(x)$, $x = 500$, er <u>ikke</u> sammenfallende produksjonskvantumet som *maks*imerer fortjenesten $TR(x)$, $x = 300$.

■

Oppgave 2: (innbyggerelastisitet / transport)

a) Innbyggerelasitsiteten $E_N(t)$:

$$\underline{\underline{E_N(t)}} = \frac{d\,t(N)}{dN} \cdot \frac{N}{t(N)} \tag{1.28}$$

$$= \frac{d}{dN}\left(c \cdot N^{0.23} \right) \cdot \frac{N}{c \cdot N^{0.23}} \tag{1.29}$$

$$= \left(\cancel{c} \cdot 0.23 \cdot \cancel{N^{0.23-1}} \right) \cdot \frac{\cancel{N}}{\cancel{c} \cdot \cancel{N^{0.23}}} \tag{1.30}$$

$$= \underline{\underline{0.23}} \tag{1.31}$$

b) Tolking:

Dersom innbyggertallet N øker med 1 % så vil den gjennomsnittlige reisetiden til jobb øke med 0.23 %.

(Altså "vekstfaktoren" er 0.23.)

c) Siden

$$E_N(t) = \frac{\text{\%-vis endring i reisetid}}{\text{\%-vis endring i innbyggertallet}} \tag{1.32}$$

så ser vi at:

$$\underline{\underline{\text{%-vis endring i reisetid}}} = \underbrace{E_N(t)}_{=\ 0.23} \cdot \underbrace{\text{%-vis endring i inntekt}}_{=\ 5\ \%} \tag{1.33}$$

$$= 0.23 \cdot 5\ \% \tag{1.34}$$

$$= \underline{\underline{1.15\ \%}} \tag{1.35}$$

d) Gjennomsnittlig reisetid til jobben for innbyggere i New York:

$$\underline{\underline{t(N)}} = c \cdot N^{0.23} \tag{1.36}$$

$$= 1.7 \cdot 8\,200\,000^{0.23} \text{ minutter} \approx \underline{\underline{66 \text{ minutter}}} \tag{1.37}$$

e) Gjennomsnittlig reisetid for innbygere i New York dersom innbyggertallet N øker med 5 %:

$$\underline{\underline{t(N)}} = c \cdot \left[(1 + \frac{5\ \%}{100\ \%}) \cdot N \right]^{0.23} \tag{1.38}$$

$$= 1.7 \cdot (\, 1.05 \cdot 8\,200\,000\,)^{0.23} \text{ minutter} \approx \underline{\underline{67 \text{ minutter}}} \tag{1.39}$$

eller man kan bruke svaret fra oppgave **c** og **d**:

$$\underline{\underline{t(N)}} = 66 \cdot \left(1 + \frac{1.15\ \%}{100\ \%} \right) \text{ minutter} \approx \underline{\underline{67 \text{ minutter}}} \tag{1.40}$$

■

Oppgave 3: (annuitetslån vs serielån)

a) Terminbeløpet for annuitetslånet er: (se formelsamling)

$$\underline{\underline{K}} = K_0 \cdot \frac{r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \tag{1.41}$$

$$= 300\,000 \cdot \frac{0.03}{1 - \frac{1}{(1+0.03)^{15}}} \text{ NOK} \approx \underline{\underline{25\,130 \text{ NOK}}} \tag{1.42}$$

b) For et annuitetslån gjeider:

$$n \cdot K = K_0 + R_n^{\text{ann}} \tag{1.43}$$

Denne ligningen kan vi løse med hensyn på R_n^{ann}:

$$\underline{\underline{R_n^{\text{ann}}}} = n \cdot K - K_0 \tag{1.44}$$

$$\approx \left(15 \cdot \underbrace{25\,130}_{\text{oppg. 3a}} - 300\,000 \right) \text{ NOK} = \underline{\underline{76\,950 \text{ NOK}}} \tag{1.45}$$

hvor svaret fra oppgave **3a** er benyttet.
Alternativt kan man også bruke formelen fra formelsamlingen:

$$\underline{\underline{R_n^{\text{ann}}}} = K_0 \cdot \left[\frac{n \cdot r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} - 1 \right] \tag{1.46}$$

$$= 300\,000 \cdot \left[\frac{15 \cdot 0.03}{1 - \frac{1}{(1+0.03)^{15}}} - 1 \right] \text{ NOK} \approx \underline{\underline{76\,950 \text{ NOK}}} \tag{1.47}$$

c) Avdragene for et serielån er konstante:

$$\underline{\underline{\text{avdrag}}} \;=\; \frac{K_0}{n} \;=\; \frac{300\,000}{15}\ \text{NOK} \;=\; \underline{\underline{20\,000\ \ \text{NOK}}} \tag{1.48}$$

d) Renten for serielånet er: (se formelsamling)

$$\underline{\underline{R_n^{\text{serie}}}} \;=\; K_0 \cdot r\,\frac{n+1}{2} \;=\; 300\,000 \cdot 0.03 \cdot \frac{15+1}{2}\ \text{NOK} \;=\; \underline{\underline{72\,000\ \ \text{NOK}}} \tag{1.49}$$

e) Forklaring på hvorfor $R_n^{\text{ann}} \;>\; R_n^{\text{serie}}$:

I starten av lånets tilbakebetalingstid betaler firmaet **mindre** tilbake til banken ved et annuitetslån enn et serielån. Dermed lånes pengene "**lenger**".
Renten blir derfor **større** for et annuitetslån.

■

Oppgave 4: (Lagrange multiplikator)

a) Den faste kostnaden er den kostnaden som er uavhengig av produksjonen, dvs. $K(x,y)$ når $x=0$ og $y=0$:

$$\underline{\underline{K(0,0)}} = 500x + 100y + 100xy + 1200 \Big|_{x=0,y=0} = \underline{\underline{1200 \ \text{NOK}}} \tag{1.50}$$

b) Inntekten $I(x,y)$ er:

$$\underline{\underline{I(x,y)}} = p_{\mathbf{A}}(x,y)x \ + \ p_{\mathbf{B}}(x,y)y \tag{1.51}$$

$$= (4000 - 100x + 200y)x \quad + \quad (2600 + 200x - 100y)y \tag{1.52}$$

$$= 4000x - 100x^2 + 200xy \quad + \quad 2600y + 200xy - 100y^2 \tag{1.53}$$

$$= \underline{\underline{-100x^2 - 100y^2 + 400xy + 4000x + 2600y}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{1.54}$$

c) Profitten $P(x,y)$ er:

$$\underline{\underline{P(x,y)}} = I(x,y) \ - \ K(x,y) \tag{1.55}$$

$$= -100x^2 - 100y^2 + 400xy + 4000x + 2600y - (\,500x + 100y + 100xy + 1200\,) \tag{1.56}$$

$$= -100x^2 - 100y^2 + 400xy + 4000x + 2600y - 500x - 100y - 100xy - 1200 \tag{1.57}$$

$$= \underline{\underline{-100x^2 - 100y^2 + 300xy + 3500x + 2500y - 1200}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{1.58}$$

d) Dette er et maksimeringsproblem under en bibetingelse. Derfor er dette en situasjon som er godt egnet for å bruke Lagrange multiplikator.

Bibetingelsen kan skrives:

$$g(x,y) \;=\; x+y \;=\; 12 \tag{1.59}$$

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$F(x,y) \;=\; P(x,y) \;-\; \lambda\,[\,g(x,y)-c\,] \tag{1.60}$$

hvor $c = 12$. De stasjonære punktene til $F(x,y)$ er:

$$\frac{\partial\, F(x,y)}{\partial x} \;=\; 0 \qquad , \qquad \frac{\partial\, F(x,y)}{\partial y} \;=\; 0 \tag{1.61}$$

$$\frac{\partial\, P(x,y)}{\partial x} - \lambda\,\frac{\partial\, g(x,y)}{\partial x} \;=\; 0 \qquad , \qquad \frac{\partial\, P(x,y)}{\partial y} - \lambda\,\frac{\partial\, g(x,y)}{\partial y} \;=\; 0 \tag{1.62}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(-100x^2-100y^2+300xy+3500x+2500y\Big) \;-\; \lambda\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(x+y-12\Big) \;=\; 0 \tag{1.63}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(-100x^2-100y^2+300xy+3500x+2500y\Big) \;-\; \lambda\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(x+y-12\Big) \;=\; 0 \tag{1.64}$$

$$-200x+300y+3500 \;-\; \lambda \;=\; 0 \tag{1.65}$$

$$-200y+300x+2500 \;-\; \lambda \;=\; 0 \tag{1.66}$$

$$\begin{aligned} -200x + 300y + 3500 &= \lambda && (1.67) \\ -200y + 300x + 2500 &= \lambda && (1.68) \end{aligned}$$

De to ligningene i lign.(1.67) og (1.68) sammen med bibetingensen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x, y og λ. Dermed er dette et ligningssytem som kan ha en bestemt ("entydig") løsning. Vi kan nå bruke "innsettingsmetoden" [1]. Siden λ ikke er en interesant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ i lign.(1.67) og (1.68):

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda && (1.69) \\ -200x + 300y + 3500 &= -200y + 300x + 2500 && (1.70) \\ 300y + 200y &= 300x + 200x + 3500 - 3500 && (1.71) \\ 500y &= 500x - 1000 && (1.72) \\ \underline{y = x - 2} & && (1.73) \end{aligned}$$

og den uinteressante størrelsen λ er eliminert. Setter lign.(1.73) inn i bibetingelsen:

$$\begin{aligned} x + y &= 12 && (1.74) \\ x + \left(x - 2\right) &= 12 && (1.75) \\ 2x &= 12 + 2 && (1.76) \\ \underline{x = 7} & && (1.77) \end{aligned}$$

som gir, f.eks. via lign.(1.73), $\underline{y} = 12 - 7 = \underline{5}$.

[1] Med "innsettingsmetoden" mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

Maksimum for profitten $P(x, y)$ inntreffer altså for punktet $(x, y) = (7, 5)$.
For å maksimere profitten bør MBM produsere:

$$\underline{\underline{x \;= 7}} \qquad \textbf{A} \text{ kåper, spesialversjon} \tag{1.78}$$

$$\underline{\underline{y \;= 5}} \qquad \textbf{B} \text{ kåper, klassisk versjon} \tag{1.79}$$

e) Maksimal profitt P_{maks} for MBM:

$$\underline{P(7, 5)} \overset{\text{lign.(1.58)}}{=} -100x^2 - 100y^2 + 300xy + 3500x + 2500y - 1200 \Big|_{x=7, y=5} \tag{1.80}$$

$$= \left(-100 \cdot 7^2 - 100 \cdot 5^2 + 300 \cdot 7 \cdot 5 + 3500 \cdot 7 + 2500 \cdot 5 - 1200 \right) \text{ NOK} \tag{1.81}$$

$$= \underline{\;38\,900 \;\; \text{NOK}\;} \tag{1.82}$$

Den største profitten til MBM, som fås ved å produsere $x = 7$ kåper av type **A** og $y = 5$ kåper av type **B**, er $\underline{\underline{P_{\text{maks}} = 38\,900 \text{ NOK.}}}$

f) Prising for å oppnå P_{maks}:

$$\underline{p_{\mathbf{A}}(7,5)} = 4000 - 100x + 200y \Big|_{x=7,y=5} \tag{1.83}$$

$$= (\,4000 - 100 \cdot 7 + 200 \cdot 5\,) \ \ \text{NOK} \quad = \quad \underline{4300 \ \ \text{NOK}} \tag{1.84}$$

$$\underline{p_{\mathbf{B}}(7,5)} = 2600 + 200x - 100y \Big|_{x=7,y=5} \tag{1.85}$$

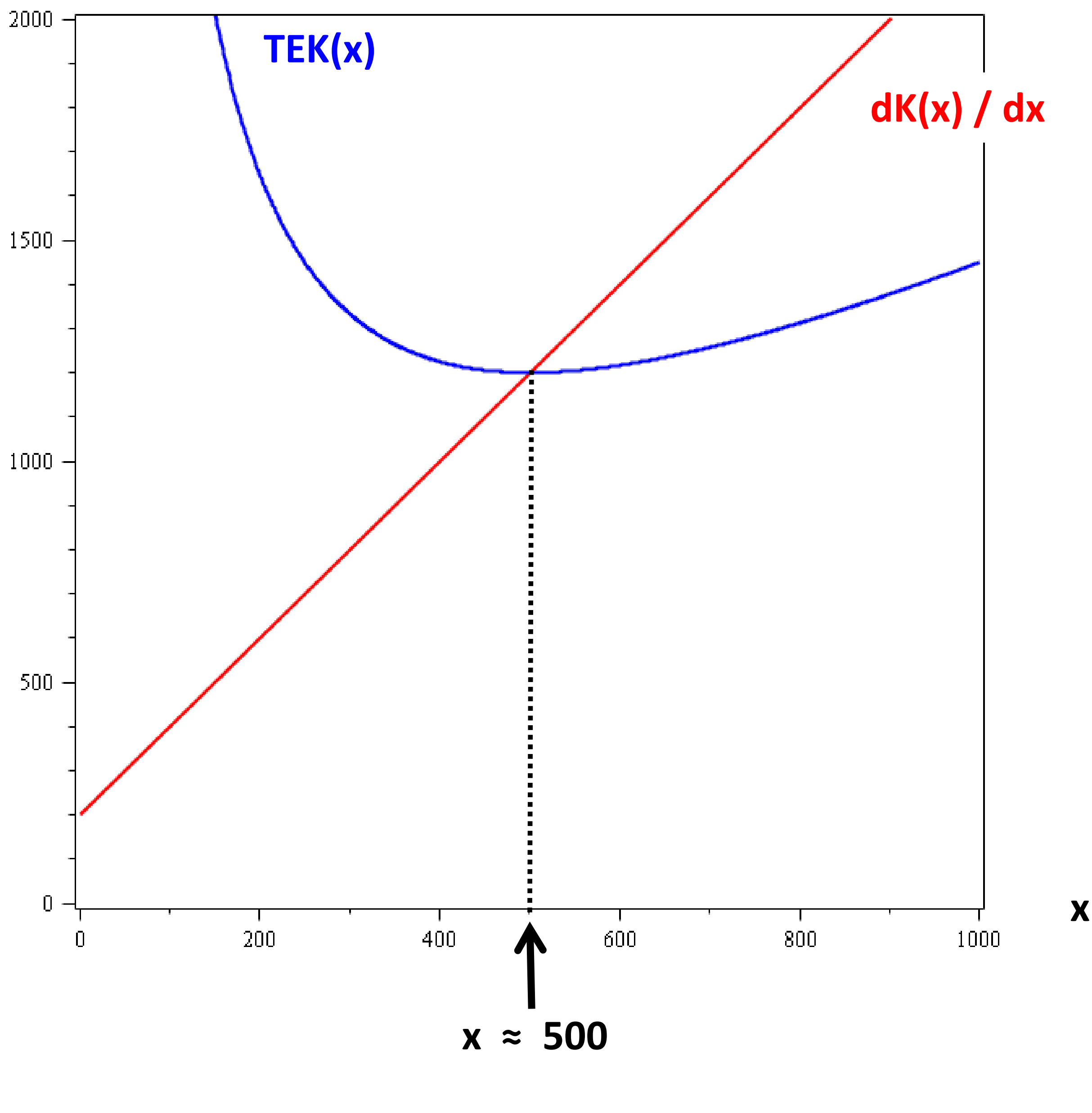
$$= (\,2600 + 200 \cdot 7 - 100 \cdot 5\,) \ \ \text{NOK} \quad = \quad \underline{3500 \ \ \text{NOK}} \tag{1.86}$$

Den største profitten oppnås dersom prisen på spesialkåper **A** settes til $\underline{\underline{p_{\mathbf{A}}(7,5) = 4300 \text{ NOK}}}$ og klasisk kåpe **A** prises til $\underline{\underline{p_{\mathbf{B}}(7,5) = 3500 \text{ NOK}}}$.

■

Vedlegg A

x	0	400	800
dK(x) / dx	200	1000	1800



Kapittel 2

LØSNING: Eksamen 7. juni 2013

"MAT100 Matematikk"

Oppgave 1: (økonomi, kostnad, inntekt og fortjeneste)

a) Den totale fortjenesten $F(x)$ per uke er:

$$\underline{\underline{F(x)}} = \underbrace{\text{inntekt}}_{=\,p\cdot x} - \underbrace{\text{kostnad}} \tag{2.1}$$

$$= p \cdot x - K(x) \tag{2.2}$$

$$= p \cdot x - \Big(ax^2 + bx + c \Big) \tag{2.3}$$

$$= \underline{\underline{(p-b)x - ax^2 - c}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{2.4}$$

b) Produksjonsmengden som gir balanse mellom inntekt og den totale kostnaden er bestemt av $F(x)$:

$$F(x) = 0 \tag{2.5}$$

$$(p-b)x - ax^2 - c = 0 \tag{2.6}$$

$$-2x^2 + (560 - 200)x - 11\,200 = 0 \tag{2.7}$$

$$-2x^2 + 360x - 11\,200 = 0 \tag{2.8}$$

som er en 2. gradsligning.
Løser 2. gradsligningen: (se side 16 i formelsamlingen fra 2012)

$$x = \frac{-360 \pm \sqrt{360^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-11\,200)}}{2 \cdot (-2)} = \begin{cases} 40 \\ \\ 140 \end{cases} \tag{2.9}$$

Dersom Jobbfrukt produserer og selger 40 eller 140 fruktfat så er det balanse mellom inntekt og kostnad.

c) Fortjenesten $F(x)$ optimeres når $F'(x)$:

$$F'(x) = 0 \tag{2.10}$$

$$\frac{d\,F}{dx} = 0 \tag{2.11}$$

$$\frac{d}{dx}\Big((p-b)x - ax^2 - c \Big) = 0 \tag{2.12}$$

$$p - b - 2ax = 0 \tag{2.13}$$

som gir, når man løser med hensyn på x:

$$\underline{\underline{x = \frac{p-b}{2a}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{2.14}$$

Den 2. deriverte:

$$\underline{F''(x)} = \frac{d^2F}{dx^2} \tag{2.15}$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\Big((p-b)x - ax^2 - c \Big) \tag{2.16}$$

$$= \frac{d}{dx}\Big(p - b - 2ax \Big) = \underline{-2a} \tag{2.17}$$

er negativ siden $a > 0$. Dermed representerer x i lign.(2.14) et maksimum.

d) Setter inn tall og regner ut x i lign.(2.14). [1]

$$\underline{\underline{x}} = \frac{p-b}{2a} \tag{2.18}$$

$$= \frac{(560-200)\ \cancel{\text{NOK}}}{2\cdot 2\ \cancel{\text{NOK}}\cdot \text{uke}} = \underline{\underline{90\ \frac{1}{\text{uke}}}} \tag{2.19}$$

e) Enhetskostnad, dvs. kostnad per fruktfat:

$$\underline{\underline{E(x)}} \overset{\text{def.}}{=} \frac{K(x)}{x} \tag{2.20}$$

$$= \frac{ax^2+bx+c}{x} = \underline{\underline{ax+b+\frac{c}{x}}} \quad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{2.21}$$

f) Den deriverte av $E(x)$:

$$\underline{\frac{d\,E(x)}{dx}} = \frac{d}{dx}\left(ax+b+\frac{c}{x}\right) = \underline{a - \frac{c}{x^2}} \tag{2.22}$$

Optimum til $E(x)$ finnes ved å derivere og deretter sette den deriverte lik null:

$$\frac{d\,E(x)}{dx} = 0 \tag{2.23}$$

$$a - \frac{c}{x^2} = 0 \quad \Big|\cdot x^2 \tag{2.24}$$

$$ax^2 - c = 0 \quad \Big|\cdot \frac{1}{a} \tag{2.25}$$

[1] Husk rett benevning.

$$x^2 - \frac{c}{a} = 0 \tag{2.26}$$

$$\underline{\underline{x = \sqrt{\frac{c}{a}}}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{2.27}$$

Den 2. deriverte:

$$\underline{E''(x)} = \frac{d^2E}{dx^2} \tag{2.28}$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\left(ax + b + \frac{c}{x}\right) \tag{2.29}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(a - \frac{1}{x^2}\right) \tag{2.30}$$

$$= -\frac{(-2)}{x^3} \quad = \underline{\frac{2}{x^3}} \tag{2.31}$$

er positiv siden $x > 0$. Dermed representerer x i lign.(2.27) et minimum.

g) Setter inn numeriske verdier:

$$\underline{\underline{x}} = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{11\,200\ \cancel{\text{NOK}}}{2\ \cancel{\text{NOK}} \cdot (\text{uke})^2}} \approx \underline{\underline{75\ \frac{1}{\text{uke}}}} \tag{2.32}$$

h) Maksimum av fortjenesten $F(x)$ inntreffer for $x = 90\ \frac{1}{\text{uke}}$, mens minimum av enhetskostnaden $E(x)$ inntreffer ved $x = 75\ \frac{1}{\text{uke}}$.
Disse er altså ikke sammenfallende.
Man skal ikke minimere enhetskostnadene for “enhver pris”.

■

Oppgave 2: (priselastisitet / økonomi)

a) Se vedlegg A.

b) Priselastisiteten $E_p(x)$:

$$\underline{\underline{E_p(x)}} = \frac{d\,x(p)}{dp} \cdot \frac{p}{x(p)} \tag{2.33}$$

$$= \frac{d}{dp}\left(c \cdot p^{-1.2} \right) \cdot \frac{p}{c \cdot p^{-1.2}} \tag{2.34}$$

$$= \left(\cancel{c} \cdot (-1.2) \cdot \cancel{p^{-1.2-1}} \right) \cdot \frac{\cancel{p}}{\cancel{c} \cdot \cancel{p^{-1.2}}} \tag{2.35}$$

$$= \underline{\underline{-1.2}} \tag{2.36}$$

c) Tolking:

Dersom prisen p på brus øker med 1 % så vil etterspørselen $\underline{\underline{\text{minke med 1.2 \%}}}$.

(Altså "reduksjonsfaktoren" er 1.2.)

d) Siden

$$E_p(x) = \frac{\text{\%-vis endring i etterspørsel}}{\text{\%-vis endring i pris}} \tag{2.37}$$

så ser vi at:

$$\underline{\underline{\text{\%-vis endring i etterspørsel}}} = \underbrace{E_p(t)}_{=\,-1.2} \cdot \underbrace{\text{\%-vis endring i inntekt}}_{=\,8\ \%} \tag{2.38}$$

$$= (-1.2)\cdot 8\ \% \tag{2.39}$$

$$= \underline{\underline{-\,9.6\ \%}} \tag{2.40}$$

e) Etterspørselen av 0.5 liter brus per dag:

$$\underline{\underline{x(p=18)}} = c\cdot p^{-1.2} \tag{2.41}$$

$$= 65\,000\cdot 18^{-1.2} \approx \underline{\underline{2\,026}} \tag{2.42}$$

f) Etterspørsel per dag dersom prisen øker med 12 %:

$$\underline{\underline{x(p)}} = c\cdot\left[(1+\frac{12\ \%}{100\ \%})\cdot p\right]^{-1.2} \tag{2.43}$$

$$= 65\,000\cdot(\,1.12\cdot 18\,)^{-1.2} \approx \underline{\underline{1\,768}} \tag{2.44}$$

■

Oppgave 3: (diskret vs kontinuerlig rente)

a) Tar utgangspunkt i renteformelen [2] og løser med hensyn på n alene:

$$K_n = K_0\,(1+r)^n \qquad \Big| \cdot \frac{1}{K_0} \tag{2.45}$$

$$\frac{K_n}{K_0} = (1+r)^n \tag{2.46}$$

$$\frac{K_n}{K_0} = (1+r)^n \qquad \text{ta ln (eller log) på hver side av ligningen} \tag{2.47}$$

$$\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = \ln(1+r)^n \qquad \text{bruker regneregel:} \quad \ln x^n = n \ln x \tag{2.48}$$

$$\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = n \cdot \ln(1+r) \qquad \Big| \cdot \frac{1}{\ln(1+r)} \tag{2.49}$$

$$\frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1+r)} = n \tag{2.50}$$

$$\underline{\underline{n = \frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1+r)}}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{2.51}$$

b) Bruker lign.(2.51) og setter inn de oppgitte tallene:

$$\underline{n} \overset{\text{lign.(2.51)}}{=} \frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1+r)} \tag{2.52}$$

$$= \frac{\ln(\frac{15\,000\ \cancel{\text{NOK}}}{10\,000\ \cancel{\text{NOK}}})}{\ln(1+0.03)} \overset{\text{kalkis}}{=} \underline{13.7} \tag{2.53}$$

Med tilbudet fra DnB tar det $\underline{\underline{13.7\ \text{år}}}$ å spare til 15 000 NOK.

[2] Se formelsamling.

c) Tar utgangspunkt i den kontinuerlige renteformelen [3] og løser med hensyn på t alene:

$$K_t = K_0 \, e^{rt} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{K_0} \tag{2.54}$$

$$\frac{K_t}{K_0} = e^{rt} \qquad \text{ta ln på hver side av ligningen} \tag{2.55}$$

$$\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right) = \ln e^{rt} \qquad \text{bruker regneregel:} \quad \ln x^n = n \ln x \tag{2.56}$$

$$\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right) = r \cdot t \qquad \Big| \cdot \frac{1}{r} \tag{2.57}$$

$$\frac{\ln(\frac{K_t}{K_0})}{r} = t \tag{2.58}$$

$$\underline{\underline{t = \frac{\ln(\frac{K_t}{K_0})}{r}}} \quad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{2.59}$$

d) Bruker lign.(2.59) og setter inn de oppgitte tallene:

$$\underline{t} \overset{\text{lign.(2.51)}}{=} \frac{\ln(\frac{K_t}{K_0})}{r} \tag{2.60}$$

$$= \frac{\ln(\frac{15\,000 \ \cancel{\text{NOK}}}{10\,000 \ \cancel{\text{NOK}}})}{0.028} \overset{\text{kalkis}}{=} \underline{14.5} \tag{2.61}$$

Med tilbudet fra Sparebanken Møre tar det $\underline{\underline{14.5 \quad \text{år}}}$ å spare til 15 000 NOK.

e) Det tar kortest tid å spare til 15 000 NOK med tilbudet fra DnB.
DnB har det beste tilbudet.

■

[3] Se formelsamling.

Oppgave 4: (nyttemaksimering / Lagrange multiplikatorer / økonomi)

a) Nyttefunksjonen

$$\underline{\underline{U(x, y) \;=\; 4\, x^{0.4} y^{0.6}}} \tag{2.62}$$

skal maksimeres under bibetingelsen

$$\underline{\underline{g(x, y) \;=\; p_x x + p_y y \;=\; m}} \tag{2.63}$$

b) Lagrange-funksjonen er:

$$F(x, y) \;=\; U(x, y) \;-\; \lambda\, [\, g(x, y) - m\,] \tag{2.64}$$

hvor m er en konstant. De stasjonære punktene til $F(x, y)$ er:

$$\frac{\partial\, F(x, y)}{\partial x} \;=\; 0 \qquad , \qquad \frac{\partial\, F(x, y)}{\partial y} \;=\; 0 \tag{2.65}$$

$$\frac{\partial\, U(x, y)}{\partial x} - \lambda\, \frac{\partial\, g(x, y)}{\partial x} \;=\; 0 \qquad , \qquad \frac{\partial\, U(x, y)}{\partial y} - \lambda\, \frac{\partial\, g(x, y)}{\partial y} \;=\; 0 \tag{2.66}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(4\, x^{0.4} y^{0.6} \right) \;-\; \lambda\, \frac{\partial}{\partial x}\left(p_x x + p_y y \right) \;=\; 0 \tag{2.67}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(4\, x^{0.4} y^{0.6} \right) \;-\; \lambda\, \frac{\partial}{\partial y}\left(p_x x + p_y y \right) \;=\; 0 \tag{2.68}$$

$$
\begin{aligned}
4 \cdot 0.4 \cdot x^{0.4-1} y^{0.6} \quad &- \quad \lambda\, p_x \;=\; 0 && (2.69)\\
4 \cdot 0.6 \cdot x^{0.4} y^{0.6-1} \quad &- \quad \lambda\, p_y \;=\; 0 && (2.70)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1.6\, x^{-0.6} y^{0.6}}{p_x} &= \lambda && (2.71)\\
\frac{2.4\, x^{0.4} y^{-0.4}}{p_y} &= \lambda && (2.72)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1.6}{p_x}\, x^{-0.6} y^{0.6} &= \lambda && (2.73)\\
\frac{2.4}{p_y}\, x^{0.4} y^{-0.4} &= \lambda && (2.74)
\end{aligned}
$$

De to ligningene i lign.(2.73) og (2.74) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x, y og λ. Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt ("entydig") løsning. Vi kan nå bruke "innsettingsmetoden" [4]. Siden λ ikke er en interessant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ i lign.(2.73) og (2.74):

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \lambda && (2.75)\\
\frac{1.6}{p_x}\, x^{-0.6} y^{0.6} &= \frac{2.4}{p_y}\, x^{0.4} y^{-0.4} && (2.76)\\
y^{0.6+0.4} &= \frac{p_x}{1.6}\, \frac{2.4}{p_y}\, x^{0.4+0.6} && (2.77)
\end{aligned}
$$

$$
\underline{\; y \;=\; \frac{3}{2}\, \frac{p_x}{p_y}\, x \;} \qquad (2.78)
$$

og den uinteressante størrelsen λ er eliminert. Setter lign.(2.78) inn i bibetingelsen:

$$
\begin{aligned}
p_x x + p_y y &= m && (2.79)\\
p_x x + \cancel{p_y} \left(\frac{3}{2}\, \frac{p_x}{\cancel{p_y}}\, x \right) &= m && (2.80)
\end{aligned}
$$

[4] Med "innsettingsmetoden" mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

$$p_x\, x\, \frac{5}{2} \quad = \quad m \tag{2.81}$$

$$\underline{\underline{x \;=\; \frac{2}{5}\, \frac{m}{p_x}}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{2.82}$$

Setter lign.(2.82) inn i (2.78):

$$\underline{\underline{y}} \quad \overset{\text{lign.(2.78)}}{=} \quad \frac{3}{2}\, \frac{p_x}{p_y}\, x \tag{2.83}$$

$$= \quad \frac{3}{\cancel{2}}\, \frac{\cancel{p_x}}{p_y}\, \frac{\cancel{2}}{5}\, \frac{m}{\cancel{p_x}} \quad = \quad \underline{\underline{\frac{3}{5}\, \frac{m}{p_y}}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{2.84}$$

c) Numeriske verdier:

$$\underline{\underline{x}} \quad \overset{\text{lign.(2.82)}}{=} \quad \frac{2}{5}\, \frac{m}{p_x} \quad = \quad \frac{2}{5}\, \frac{6000\ \cancel{\text{NOK}}}{75\ \cancel{\text{NOK}}} \quad = \quad \underline{\underline{32}} \tag{2.85}$$

$$\underline{\underline{y}} \quad \overset{\text{lign.(2.84)}}{=} \quad \frac{3}{5}\, \frac{m}{p_y} \quad = \quad \frac{3}{5}\, \frac{6000\ \cancel{\text{NOK}}}{150\ \cancel{\text{NOK}}} \quad = \quad \underline{\underline{24}} \tag{2.86}$$

d) Tolking:

Med nyttefunksjonen $U(x, y) = 4\, x^{0.4} y^{0.6}$ så er det størst nytte ved å kjøpe:

$$\underline{\underline{x = 32 \ \text{ kinobilletter}}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{y = 24 \ \text{ teaterbilletter}}}$$

i året.

e) Beløp som brukes på kinobilletter per år:

$$\underline{\underline{p_x \cdot x}} \quad = \quad 75 \cdot 32 \text{ NOK} \;=\; \underline{\underline{2\,400 \text{ NOK}}} \tag{2.87}$$

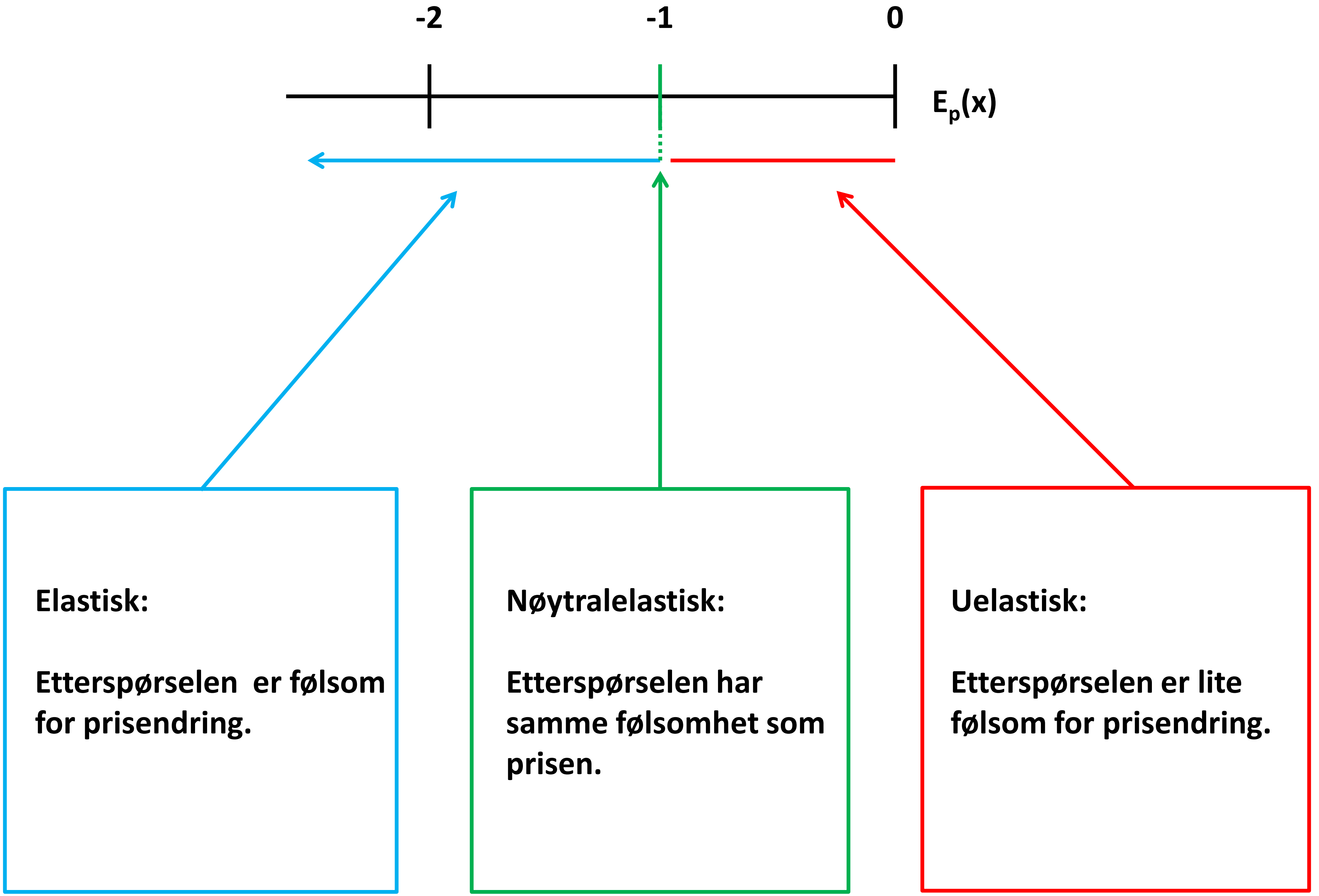
f) Beløp som brukes på teaterbilletter per år:

$$\underline{\underline{p_y \cdot y}} \quad = \quad 150 \cdot 24 \text{ NOK} \;=\; \underline{\underline{3\,600 \text{ NOK}}} \tag{2.88}$$

■

Vedlegg A

(Husk å skrive studentnummer på vedlegget.)


-2
-1
0
$E_p(x)$
Elastisk:
Etterspørselen er følsom for prisendring.
Nøytralelastisk:
Etterspørselen har samme følsomhet som prisen.
Uelastisk:
Etterspørselen er lite følsom for prisendring.

Kapittel 3

LØSNING: Eksamen 18. des. 2013

"MAT100 Matematikk"

Oppgave 1: (algebra / faktorisering / brøk)

a) Setter inn ligningene i generalbudsjettligningen:

$$\underline{R} = C + I + G + X \tag{3.1}$$

$$= \underline{C_0 + c(R - T) \ + \ I \ + \ G \ + \ X_0 - bR} \tag{3.2}$$

Flytt alle R-ledd over på venstre side:

$$R - cR + bR = C_0 \ - \ cT \ + \ I \ + \ G \ + \ X_0 \tag{3.3}$$

$$R(1 - c + b) = C_0 \ - \ cT \ + \ I \ + \ G \ + \ X_0 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{1 - c + b} \tag{3.4}$$

$$R = \frac{C_0 + X_0 \ - \ cT \ + \ I \ + \ G}{1 - c + b} \tag{3.5}$$

Med definisjonen

$$m \stackrel{\text{def.}}{\equiv} \frac{1}{1-c+b} \,, \tag{3.6}$$

kan denne ligningen skrive

$$\underline{\underline{R \;=\; m \cdot \big(C_0 + X_0 \;-\; cT \;+\; I \;+\; G\big)}} \tag{3.7}$$

b) i) c øker $\Rightarrow$ $\underline{\underline{m \text{ øker}}}$
ii) b øker $\Rightarrow$ $\underline{\underline{m \text{ minker}}}$

c) Man kan ikke dele på 0. Ut fra lign.(3.6) ser vi da at:

$$\underline{\underline{1-c+b \neq 0}} \tag{3.8}$$

d) Setter inn ligningene i *generalbudsjettligningen*:

$$\underline{R} \;=\; C + I + G + X \tag{3.9}$$

$$=\; 100 + 0.25(R-200) \;+\; 150 + 0.25R - 800r \;+\; 200 \;+\; 0 \tag{3.10}$$

$$=\; 100 + 0.25R - 50 \;+\; 150 + 0.25R - 800r \;+\; 200 \tag{3.11}$$

$$=\; \underline{0.5R - 800r \;+\; 400} \tag{3.12}$$

Nå løser vi ligningen ovenfor med hensyn på det vi ønsker, nemlig r:

$$800r = 0.5R - R + 400 \qquad | \cdot \frac{1}{800} \tag{3.13}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{r}} = \frac{-0.5R + 400}{800} \tag{3.14}$$

$$= -\frac{0.5}{800}R + \frac{400}{800} \tag{3.15}$$

$$= \underline{\underline{-0.000625R + 0.5}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (\text{IS-kurve}) \tag{3.16}$$

e) Økonomien er i likevekt når lign.(3.16) og LM-kurven som oppgitt i oppgaven, er like:

$$r \text{ i lign.(3.16)} = r \text{ i LM-kurven} \qquad (\text{likevekt}) \tag{3.17}$$

$$-0.000625R + 0.5 = 0.000375R - 0.25 \tag{3.18}$$

$$-0.000625R - 0.000375R = -0.25 - 0.5 \tag{3.19}$$

$$-0.001R = -0.75 \tag{3.20}$$

$$\underline{\underline{R = 750}} \tag{3.21}$$

f) Rentenivået finnes ved å sette $R = 750$ inn i en av formlene for r, enten lign.(3.16) eller LM-kurven som oppgitt i oppgaven. Det er samme hvilken av disse man bruker siden de er like når økonomien er i likevekt. La oss f.eks. velge LM-kurven:

$$\underline{\underline{r}} = 0.000375R - 0.25 \tag{3.22}$$

$$\stackrel{R=750}{=} 0.000375 \cdot 750 - 0.25 \tag{3.23}$$

$$= \underline{\underline{0.03125}} \tag{3.24}$$

Dersom vi i stedet bruker lign.(3.16) får vi selvfølgelig samme svar:

$$\underline{\underline{r}} \stackrel{\text{lign.(3.16)}}{=} -0.000625R + 0.5 \tag{3.25}$$

$$\stackrel{R=750}{=} -0.000625 \cdot 750 + 0.5 \tag{3.26}$$

$$= \underline{\underline{0.03125}} \tag{3.27}$$

g) Lign.(3.16) og LM-kurven er lineære ligninger, altså 1. gradsligninger, dvs. ligninger på formen $f(x) = ax + b$, hvor a og b er konstanter.

h) Se vedlegg A.

i) Av figuren på i vedlegg A ser vi at grafene skjærer hverandre for $\underline{\underline{R = 750}}$. Dette stemmer med **1f**.

j) Husk at når man skal finne den %-vise endring må man dele på det man starter med, dvs. dele med $I_1 = 468$ i vårt tilfelle. Dermed:

$$\underline{\underline{\% - \text{vis endring}}} \quad = \quad \frac{I_2 - I_1}{I_1} \quad = \quad \frac{543 - 468}{468} \cdot 100\,\% \quad \approx \quad \underline{\underline{16.03\%}} \tag{3.28}$$

som altså er en økning siden tallet i lign.(3.28) er positivt.

Test: [1]

For å teste at svaret vårt i lign.(3.28) er riktig så kan vi gjøre følgende test: Legg til 16.03% på startinvesteringen $I_1 = 468$. Da ender vi opp med:

$$\underline{I_1 \cdot (1 + 16.03\%)} \;=\; I_1 \cdot 1.1603 \;\approx\; \underline{543} \tag{3.29}$$

som stemmer med oppgaven, $I_2 = 543$.

■

[1] Dette behøver du ikke å skrive inn i eksamenbesvarelsen. Men det kan være lurt å sjekke svaret ditt på kladd.

Oppgave 2: (derivasjon / algebra / tolkning / forståelse av ligninger)

a) Alle størrelsene H, D og S er positive. Dermed:

i) Q øker $\Rightarrow$ $\underline{\underline{HQ/2 \text{ øker}}}$
ii) Q øker $\Rightarrow$ $\underline{\underline{DS/Q \text{ minker}}}$

b) Optimum av total kostnad $TC(Q)$ inntreffer når stigningstallet $= 0$:

$$\begin{aligned}
\text{stigningstallet til } TC(Q) &= 0 && (3.30)\\
\frac{d\,TC(Q)}{dQ} &= 0 && (3.31)\\
\frac{d}{dQ}\left(\frac{H}{2}Q + \frac{DS}{Q}\right) &= 0 && (3.32)\\
\frac{d}{dQ}\left(\frac{H}{2}Q + DS\,Q^{-1}\right) &= 0 && (3.33)\\
\frac{H}{2} + DS\,(-1)Q^{-1-1} &= 0 && (3.34)\\
\frac{H}{2} - \frac{DS}{Q^2} &= 0 && (3.35)\\
\frac{H}{2} &= \frac{DS}{Q^2} \qquad \Big|\cdot Q && (3.36)
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\overbrace{Q\,\frac{H}{2}}^{\text{lagerkost.}} = \overbrace{\frac{DS}{Q}}^{\text{ordrekost.}}}} \quad , \qquad \text{q.e.d.} \qquad (3.37)$$

med andre ord: kostnaden optimeres når lagerkostnaden $=$ ordrekostnaden.

c) Den førstederiverte av $TC(Q)$ fant vi i oppgave **2b**, lign.(3.35):

$$\frac{d\,TC(Q)}{dQ} = \frac{H}{2} - \frac{DS}{Q^2} \; . \tag{3.38}$$

Den 2. deriverte finner vi ved å derivere en gang til:

$$\underline{\underline{\frac{d^2TC(Q)}{dQ^2}}} = \frac{d}{dQ}\left(\frac{dTC(Q)}{dQ}\right) \tag{3.39}$$

$$= \frac{d}{dQ}\left(\frac{H}{2} - \frac{DS}{Q^2}\right) \tag{3.40}$$

$$= \frac{d}{dQ}\left(\frac{H}{2} - DSQ^{-2}\right) \tag{3.41}$$

$$= 0 - DS(-2)Q^{-2-1} \tag{3.42}$$

$$= 2DSQ^{-3} = \underline{\underline{\frac{2DS}{Q^3}}} \tag{3.43}$$

Siden D, S og Q alle er positive størrelser så er også $\frac{d^2TC(Q)}{dQ^2} > 0$, dvs. $Q = EOQ$ representerer et minimum for $TC(Q)$.

d) Ut fra lign.(3.37) kan vi løse ut Q alene:

$$\frac{Q}{2}\,H = \frac{D}{Q}\,S \qquad \Big|\cdot Q \tag{3.44}$$

$$\frac{Q^2}{2}\,H = D\,S \qquad \Big|\cdot \frac{2}{H} \tag{3.45}$$

$$Q^2 = \frac{2D\,S}{H} \tag{3.46}$$

$$\underline{\underline{EOQ = \sqrt{\frac{2\,DS}{H}}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{3.47}$$

hvor notasjonen EOQ er introdusert for optimal Q.

e) Tolkning av lign.(3.47):

$$\underline{\underline{EOQ}} \quad = \quad \underline{\underline{\text{den ordrestørrelsen (av f.eks. råvarer) som må bestilles for å minimere lager- og bestillingskostnaden}}} \tag{3.48}$$

f) Den totale kostnaden i minimum, dvs. $TC_{\text{min}} = TC(EOQ)$, er:

$$\underline{\underline{TC_{\text{min}}}} = TC(EOQ) \tag{3.49}$$

$$= \frac{EOQ}{2} H \; + \; \frac{D}{EOQ} S \tag{3.50}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2\,DS}{H}}}{2} H \; + \; \frac{D}{\sqrt{\frac{2\,DS}{H}}} S \tag{3.51}$$

$$= \sqrt{\frac{DS\,H}{2}} \; + \; \sqrt{\frac{DS\,H}{2}} \; = \; \underline{\underline{\sqrt{2\,D\,S\,H}}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{3.52}$$

g) Tolkning av lign.(3.47):

$$\underline{\underline{TC_{\text{min}}}} \quad = \quad \underline{\underline{\text{den minste lager- og bestillingskostnaden man kan oppnå per periode under de gitte betingelsene}}} \tag{3.53}$$

h) Den totale kostnaden $TC(Q)$ med en ordrestørrelse på $Q = 100$:

$$\underline{\underline{TC(100)}} = \frac{H}{2} Q + \frac{DS}{Q} \bigg|_{Q=100} \tag{3.54}$$

$$= \left(\frac{150}{2} \cdot 100 + \frac{100 \cdot 1850}{100} \right) \text{NOK} \tag{3.55}$$

$$= \underline{\underline{9\,350 \text{ NOK}}} \tag{3.56}$$

i) Fra oppgave **2d** vet vi at den ordrestørrelsen som minimerer total kostnad $TC(Q)$ er gitt ved EOQ-formelen, dvs. lign.(3.47):

$$\underline{\underline{EOQ}} = \sqrt{\frac{2\,DS}{H}} \tag{3.57}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \, \frac{\text{dekk}}{\cancel{\text{måned}}} \cdot 1\,850 \, \cancel{\text{NOK}}}{150 \, \frac{\cancel{\text{NOK}}}{\text{dekk} \;\; \cancel{\text{måned}}}}} = \underline{\underline{50 \;\; \text{dekk}}} \tag{3.58}$$

Fra oppgave **2f** vet vi da den minste utgiten er gitt ved lign.(3.52):

$$\underline{\underline{TC_{\text{min}}}} = \sqrt{2\,D\,S\,H} \tag{3.59}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 100 \cdot 1850 \cdot 150} \text{ NOK} = \underline{\underline{\;7\,450 \text{ NOK}\;}} \tag{3.60}$$

■

Tilleggskommentar:

$TC_{\text{min}} = 7\,450$ NOK fra oppgave **i** er mindre enn $TC(100) = 9\,350$ NOK fra oppgave **2h**, slik som det skal.

Oppgave 3: (diskrèt vs kontinuerlig rente)

a) Tar utgangspunkt i renteformelen [2] og løser med hensyn på n alene:

$$K_n = K_0\,(1+r)^n \qquad \Big|\cdot \frac{1}{K_0} \tag{3.61}$$

$$\frac{K_n}{K_0} = (1+r)^n \tag{3.62}$$

$$\frac{K_n}{K_0} = (1+r)^n \qquad \text{ta ln (eller log) på hver side av ligningen} \tag{3.63}$$

$$\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = \ln(1+r)^n \qquad \text{bruker regneregel:} \quad \ln x^n = n\ln x \tag{3.64}$$

$$\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = n\cdot\ln(1+r) \qquad \Big|\cdot \frac{1}{\ln(1+r)} \tag{3.65}$$

$$\frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1+r)} = n \tag{3.66}$$

$$\underline{\underline{n = \frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1+r)}}} \quad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{3.67}$$

b) Bruker lign.(3.67) og setter inn de oppgitte tallene:

$$\underline{n} \overset{\text{lign.(3.67)}}{=} \frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1+r)} \tag{3.68}$$

$$= \frac{\ln(\frac{15\,000\ \cancel{\text{NOK}}}{10\,000\ \cancel{\text{NOK}}})}{\ln(1+0.03)} \overset{\text{kalkis}}{=} \underline{13.7} \tag{3.69}$$

Med tilbudet fra DnB tar det $\underline{\underline{13.7\ \text{år}}}$ å spare til 15 000 NOK.

[2] Se formelsamling.

c) Tar utgangspunkt i den kontinuerlige renteformelen [3] og løser med hensyn på t alene:

$$K_t = K_0\, e^{rt} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{K_0} \tag{3.70}$$

$$\frac{K_t}{K_0} = e^{rt} \qquad \text{ta ln på hver side av ligningen} \tag{3.71}$$

$$\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right) = \ln e^{rt} \qquad \text{bruker regneregel:} \quad \ln x^n = n \ln x \tag{3.72}$$

$$\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right) = r \cdot t \qquad \Big| \cdot \frac{1}{r} \tag{3.73}$$

$$\frac{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}{r} = t \tag{3.74}$$

$$\underline{\underline{t = \frac{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}{r}}} \quad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{3.75}$$

d) Bruker lign.(3.75) og setter inn de oppgitte tallene:

$$\underline{t} \overset{\text{lign.(3.75)}}{=} \frac{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}{r} \tag{3.76}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{15\,000\ \cancel{\text{NOK}}}{10\,000\ \cancel{\text{NOK}}}\right)}{0.028} \overset{\text{kalkis}}{=} \underline{14.5} \tag{3.77}$$

Med tilbudet fra Sparebanken Møre tar det $\underline{\underline{14.5 \text{ år}}}$ å spare til 15 000 NOK.

e) Det tar kortest tid å spare til 15 000 NOK med tilbudet fra DnB.
DnB har det beste tilbudet.

■

[3] Se formelsamling.

Oppgave 4: (annuitetslån vs serielån)

a) Terminbeløpet for annuitetslånet er: (se formelsamling)

$$\underline{\underline{K}} = K_0 \cdot \frac{r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \tag{3.78}$$

$$= 1\,200\,000 \cdot \frac{0.05}{1 - \frac{1}{(1+0.05)^{20}}} \text{ NOK} \approx \underline{\underline{96\,291 \text{ NOK}}} \tag{3.79}$$

b) Renten for annuitetslånet er: (se formelsamling)

$$\underline{\underline{R_n^{\text{ann}}}} = K_0 \cdot \left[\frac{n \cdot r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} - 1 \right] \tag{3.80}$$

$$= 1\,200\,000 \cdot \left[\frac{20 \cdot 0.05}{1 - \frac{1}{(1+0.05)^{20}}} - 1 \right] \text{ NOK} \approx \underline{\underline{725\,822 \text{ NOK}}} \tag{3.81}$$

c) Avdragene for et serielån er konstante:

$$\underline{\underline{\text{avdrag}}} = \frac{K_0}{n} = \frac{1\,200\,000}{20} \text{ NOK} = \underline{\underline{60\,000 \text{ NOK}}} \tag{3.82}$$

d) Renten for serielånet er: (se formelsamling)

$$\underline{\underline{R_n^{\text{serie}}}} = K_0 \cdot r \, \frac{n+1}{2} = 1\,200\,000 \cdot 0.05 \cdot \frac{20+1}{2} \text{ NOK} = \underline{\underline{630\,000 \text{ NOK}}} \tag{3.83}$$

■

Oppgave 5: (Lagrange multiplikatorer)

a) Lagrange-multiplikatorer kan brukes til bestemmelse av ekstremalverdier av en funksjon med flere variabler når disse må oppfylle en eller flere bibetingelser.

b) Dersom en funksjon

$$z = f(x, y) \quad , \tag{3.84}$$

skal optimaliseres (max eller min) under bibetingelsen

$$g(x, y) = c \quad , \tag{3.85}$$

hvor c = konstant, så kan dette optimeringsproblemet løses ved å finne x og y bestemt av ligningssystemet

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= 0 \qquad (3.86) \\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= 0 \qquad (3.87) \\ g(x,y) &= c \qquad (3.88) \end{aligned}}$$

hvor Lagrange-funksjonen $F(x, y)$ er definert ved: (λ = Lagrange multiplikatoren)

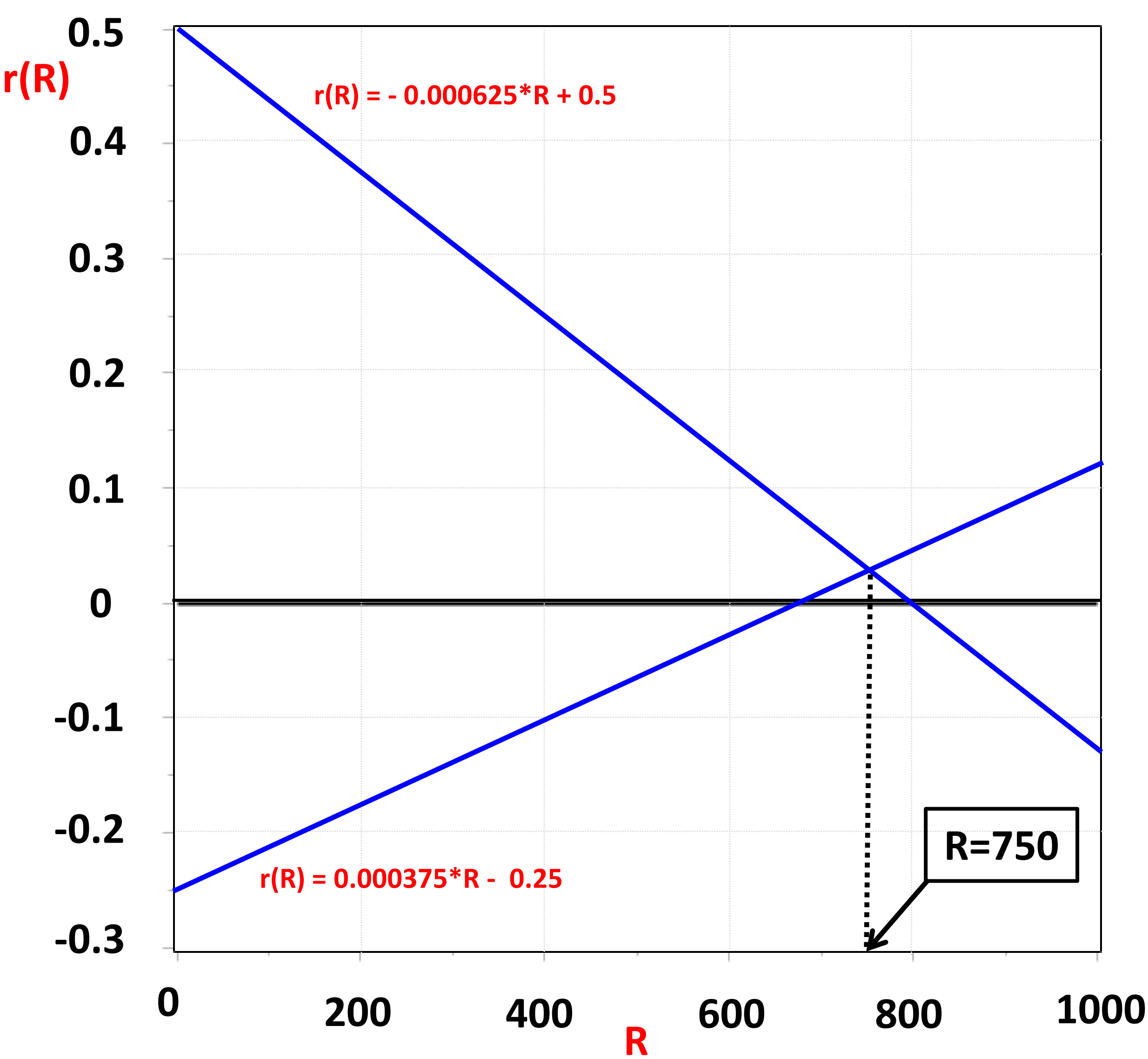
$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda\big[g(x, y) - c\big] \quad . \tag{3.89}$$

■

Vedlegg A

R	0	500	1000
r(R) = - 0.000625*R + 0.5	0.5	0.1875	- 0.125

R	0	500	1000
r(R) = 0.000375*R - 0.25	-0.25	- 0.0625	0.125



Kapittel 4

LØSNING: Eksamen 3. juni 2014

"MAT100 Matematikk"

Oppgave 1: (logistikkøkonomi)

a) Grensekostnad:

$$\underline{\underline{K'(x)}} = \left(x^2 + 50x + 425 \right)' = \underline{\underline{2x + 50}} \tag{4.1}$$

b) i) Grensekostnaden for å produsere 50 millioner oljefat, dvs. finn $K'(50)$.

$$\underline{\underline{K'(50)}} = 2 \cdot 50 + 50 = \underline{\underline{150}} \tag{4.2}$$

ii) Tolkning:

$K'(50) = 150$ betyr at dersom man utvinner 50 millioner oljefat og ønsker å utvinne en million oljefat ekstra så har dette en merkostnad på 150 millioner dollar.

c) Fortjenesten $F(x) = I(x) - K(x)$ er gitt ved:

$$\underline{\underline{F(x)}} = I(x) - K(x) \tag{4.3}$$

$$= 100x - \left(x^2 + 50x + 425\right) = \underline{\underline{-x^2 + 50x - 425}} \tag{4.4}$$

d) i) Antall oljefat som må utvinnes fra feltet for å **maksimere** profitten:

$$F'(x) = 0 \tag{4.5}$$

$$\frac{d\,F(x)}{dx} = 0 \tag{4.6}$$

$$\frac{d}{dx}\bigg(-2x + 50 \bigg) = 0 \tag{4.7}$$

$$-2x + 50 = 0 \tag{4.8}$$

$$x = 25 \tag{4.9}$$

For å maksimere fortjenesten må Shell utvinne $\underline{\underline{\text{25 millioner oljefat}}}$.

ii) Siden

$$F''(x) = -2 \tag{4.10}$$

så er $F(x)$ konkav og vi har ett enkelt stasjonært punkt i $x = 25$ som representerer et maksimum.

iii) Maksimal fortjeneste:

$$\underline{F(25)} = -25^2 + 50 \cdot 25 - 425 = \underline{200} \tag{4.11}$$

Shell sin maksimale fortjeneste er $\underline{\underline{\text{200 millioner doller}}}$.

e) %-vis øking:

$$\underline{\underline{\% - \text{vis økning}}} \;=\; \frac{F_{110} - F_{100}}{F_{100}} \;=\; \frac{475 - 200}{200} \cdot 100\,\% \;=\; \underline{\underline{137.5\,\%}} \tag{4.12}$$

PS:
En *økning* kan være mer enn 100 %.

■

Oppgave 2: (finansmatematikk)

a) For et serielån: $\underline{\underline{\text{avdragene}}}$ er konstante.
For et annuitetslån: $\underline{\underline{\text{terminbeløpene}}}$ er konstante.

b) Etter $n = 5$ år har prisen på boliger dobelt seg, dvs. gått fra K til $2K$ på 5 år.
Dette er en situasjon som beskrives av renteformelen: (Se side 79 i formelsamlingen.)

$$2\cancel{K} = (1+r)^n \cancel{K} \tag{4.13}$$
$$2 = (1+r)^n \tag{4.14}$$

Vi kjenner $n = 5$ år, og skal finne r. Må løse med hensyn på r alene:

$$2^{\frac{1}{n}} = (1+r)^{n \cdot \frac{1}{n}} \tag{4.15}$$
$$2^{\frac{1}{n}} = (1+r)^1 \tag{4.16}$$
$$2^{\frac{1}{n}} = 1+r \tag{4.17}$$

som gir:

$$\underline{r} = 2^{\frac{1}{n}} - 1 \tag{4.18}$$
$$= 2^{\frac{1}{5}} - 1 = \underline{0.1487} \tag{4.19}$$

Prisveksten er $\underline{\underline{14.87 \ \% \text{ per år}}}$ dersom boligprisene dobles i løpet av 5 år.

c) i) Terminbeløpet K ved annuitetslån er: (Se side 84 i formelsamlingen.)

$$\underline{\underline{K}} = K_0 \cdot \frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \tag{4.20}$$

$$= 900\,000 \cdot \frac{0.05 \cdot (1+0.05)^{20}}{(1+0.05)^{20} - 1} \text{ NOK} = \underline{\underline{72\,218.33 \ \text{NOK}}} \tag{4.21}$$

ii) Det totale rentebeløpet R_n^{ann} som må betales i lånets løpetid ved annuitetslån:
(Se formel for R_n^{ann} på side 85 i formelsamlingen.)

$$\underline{\underline{R_n^{\text{ann}}}} = K_0 \cdot \left[\frac{n \cdot r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} - 1 \right] \tag{4.22}$$

$$= 900\,000 \cdot \left[\frac{20 \cdot 0.05}{1 - \frac{1}{(1+0.05)^{20}}} - 1 \right] \text{ NOK} = \underline{\underline{544\,366.6 \text{ NOK}}} \tag{4.23}$$

Siden vi kjenner terminbeløpet K, antall år n og lånets størrelse K_0 så kan vi alternativt finne R_n^{ann} slik:

$$\underline{\underline{R_n^{\text{ann}}}} = n \cdot K - K_0 \tag{4.24}$$

$$= \left(20 \cdot 72\,218.33 - 900\,000 \right) \text{ NOK} = \underline{\underline{544\,366.6 \text{ NOK}}} \tag{4.25}$$

(På eksamen er det nok å bare løse oppgaven på èn av måtene.)

d) Dersom lånet skal tilbakebetales som et serielån, derimot, så blir den totale renten:
(Se formel for R_n^{serie} på side 78 i formelsamlingen.)

$$\underline{\underline{R_n^{\text{serie}}}} = K_0 \cdot r \, \frac{n+1}{2} \tag{4.26}$$

$$= 900\,000 \cdot 0.05 \, \frac{20+1}{2} \text{ NOK} = \underline{\underline{472\,500 \text{ NOK}}} \tag{4.27}$$

e) Ved annuitetslån betaler man lite i avdrag i starten. Og tilsvarende mye renter.
For et serielån, derimot, betaler man faste "store" avdrag hele tiden.
Dermed blir renten tilsvarende mindre. Altså:

$$R_n^{\text{ann}} > R_n^{\text{serie}} \tag{4.28}$$

■

Oppgave 3: (logistikk og økonomi)

a) Gjør om ulikheten til likhet i budsjettligningen og løser med hensyn på y alene:

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y = m \tag{4.29}$$

$$p_y \cdot y = m - p_x \cdot x \qquad \Big| \cdot \frac{1}{p_y} \tag{4.30}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{m}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} \cdot x}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{4.31}$$

b) i) Linjen i lign.(4.31) skjærer y-aksen når $x = 0$:

$$y = \frac{m}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} \cdot \overbrace{x}^{=\,0} \tag{4.32}$$

$$y = \frac{m}{p_x} - \frac{p_x}{p_y} \cdot 0 \tag{4.33}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{m}{p_y}}} \tag{4.34}$$

ii) Linjen i lign.(4.31) skjærer x-aksen når $y = 0$:

$$\overbrace{y}^{=0} = \frac{m}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} \cdot x \tag{4.35}$$

$$0 = \frac{m}{\cancel{p_y}} - \frac{p_x}{\cancel{p_y}} \cdot x \qquad \Big| \cdot \cancel{p_y} \tag{4.36}$$

$$0 = m - p_x \cdot x \tag{4.37}$$

$$p_x \cdot x \quad = \quad m \qquad \Big| \cdot \frac{1}{p_x} \tag{4.38}$$

$$\underline{\underline{x \;=\; \frac{m}{p_x}}} \tag{4.39}$$

iii) Stigningstallet til den lineære lign.(4.31)

$$y \;=\; \frac{m}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} \cdot x \tag{4.40}$$

er *koeffisienten* foran x-variabelen, dvs.:

$$\underline{\underline{\text{stigningstall} = \; - \frac{p_x}{p_y}}} \tag{4.41}$$

c) Setter tallene som oppgitt for parametrene inn i budsjettligningen:

$$\underline{\underline{y}} \quad = \quad \frac{m}{p_y} \; - \; \frac{p_x}{p_y} \cdot x \tag{4.42}$$

$$= \quad \frac{35\,000}{15} \; - \; \frac{1250}{15} \tag{4.43}$$

$$= \quad \underline{\underline{2333.33 \; - \; 83.33 \cdot x}} \qquad , \quad \text{q.e.d.} \tag{4.44}$$

d) Løser med hensyn på y alene for gitt nytte $U(x,y) = U_0$ i nyttefunksjonen:

$$\overbrace{U(x,y)}^{=U_0} = c\,xy^5 \tag{4.45}$$

$$c\,xy^5 = U_0 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{c\,x} \tag{4.46}$$

$$y^5 = \frac{U_0}{c\,x} \tag{4.47}$$

$$\underline{\underline{y = \left(\frac{U_0}{c\,x}\right)^{\frac{1}{5}}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{4.48}$$

e) Se vedlegg A.

f) Ved avlesning fra figuren ser vi at: (se vedlegg A)

$$\underline{\underline{x_0 \approx 4.6 \, \frac{\text{timer}}{\text{mnd}}}} \quad , \quad \underline{\underline{y_0 \approx 1950 \, \frac{\text{liter}}{\text{mnd}}}} \tag{4.49}$$

Den optimale kombinasjonen av diesel og vedlikehold som gir maksimal nytte er altså $x_0 \approx 4.6$ timer vedlikehold i gjennomsnitt per måned og $y_0 \approx 1950$ liter diesel per måned.

Kommentar:

Siden dette er en avlesning fra en figur så er det en del usikkerhet forbundet med en slik avlesning.
Derfor: bare man er "noenlunde" i nærheten av lign.(4.49) så godtas det.

■

Oppgave 4: (økonomi)

a) Ønsker å selge $x(p) = 80$ aviser:

$$x(p) = c\, e^{-0.1p} \tag{4.50}$$
$$\frac{x(p)}{c} = e^{-0.1p} \tag{4.51}$$
$$\ln\left(\frac{x(p)}{c}\right) = -0.1p \tag{4.52}$$
$$-10 \cdot \ln\left(\frac{x(p)}{c}\right) = p \tag{4.53}$$

Til slutt kan vi sette inn tallene som oppgitt:

$$\underline{p} = -10 \cdot \ln\left(\frac{80}{800}\right) = \underline{23.03 \;\; \text{NOK}} \tag{4.54}$$

Avisgutten selger 80 aviser dersom prisen på avisen er $\underline{\underline{23 \text{ NOK}}}$.

b) Priselastisiteten $E_p(x)$:

$$\underline{\underline{E_p(x)}} = \frac{d\,x(p)}{dp} \cdot \frac{p}{x(p)} \tag{4.55}$$
$$= \frac{d}{dp}\left(c \cdot e^{-0.1p}\right) \cdot \frac{p}{c \cdot e^{-0.1p}} \tag{4.56}$$
$$\overset{u=-0.1p}{=} \frac{d}{du}\left(c \cdot e^{u}\right)\frac{du}{dp} \cdot \frac{p}{c \cdot e^{-0.1p}} \tag{4.57}$$
$$= \left(\cancel{c} \cdot \cancel{e^{u}}\right)(-0.1) \cdot \frac{p}{\cancel{c} \cdot \cancel{e^{-0.1p}}} \tag{4.58}$$
$$= \underline{\underline{-\,0.1 \cdot p}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{4.59}$$

I utregningen ovenfor er kjerneregelen brukt.

c) <u>Tolking</u>:

Dersom prisen på aviser øker med 1 % så vil etterspørselen $\underline{\underline{\textbf{minke} \text{ med } 0.1 \cdot 25\ \% = 2.5\ \%}}$.

(Altså "reduksjonsfaktoren" er 2.5.)

d) Siden

$$E_p(x) \;=\; \frac{\%\text{-vis endring i etterspørsel}}{\%\text{-vis endring i pris}} \tag{4.60}$$

så kan vi løse denne ligningen med hensyn på **telleren**,
dvs. løser med hensyn på "%-vis endring i etterspørselen":

$$\underline{\underline{\%\text{-vis endring i etterspørsel}}} \;=\; \underbrace{E_p(t)}_{=\ -0.1\cdot p} \cdot \underbrace{\%\text{-vis endring i inntekt}}_{=\ 5\ \%} \tag{4.61}$$

$$= \; -0.1 \cdot 25 \cdot 5\ \% \tag{4.62}$$

$$= \; -2.5 \cdot 5\ \% \tag{4.63}$$

$$= \; \underline{\underline{-\,12.5\ \%}} \tag{4.64}$$

■

Oppgave 5: (Lagrange multiplikatorer)

a) Metoden med Lagrange multiplikatorer kan brukes til bestemmelse av ekstremalverdier av en funksjon med flere variabler når disse må oppfylle en eller flere bibetingelser.

b) Dersom en funksjon

$$z \;=\; f(x,y) \quad , \tag{4.65}$$

skal optimaliseres (max eller min) under bibetingelsen

$$g(x,y) \;=\; c \quad , \tag{4.66}$$

hvor $c =$ konstant, så kan dette optimeringsproblemet løses ved å finne x og y bestemt av ligningssystemet

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= 0 && (4.67) \\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= 0 && (4.68) \\ g(x,y) &= c && (4.69) \end{aligned}}$$

hvor Lagrange-funksjonen $F(x,y)$ er definert ved:

$$F(x,y) = f(x,y) - \lambda\big[\, g(x,y) - c \,\big] \ , \tag{4.70}$$

og hvor $\lambda =$ Lagrange multiplikatoren.

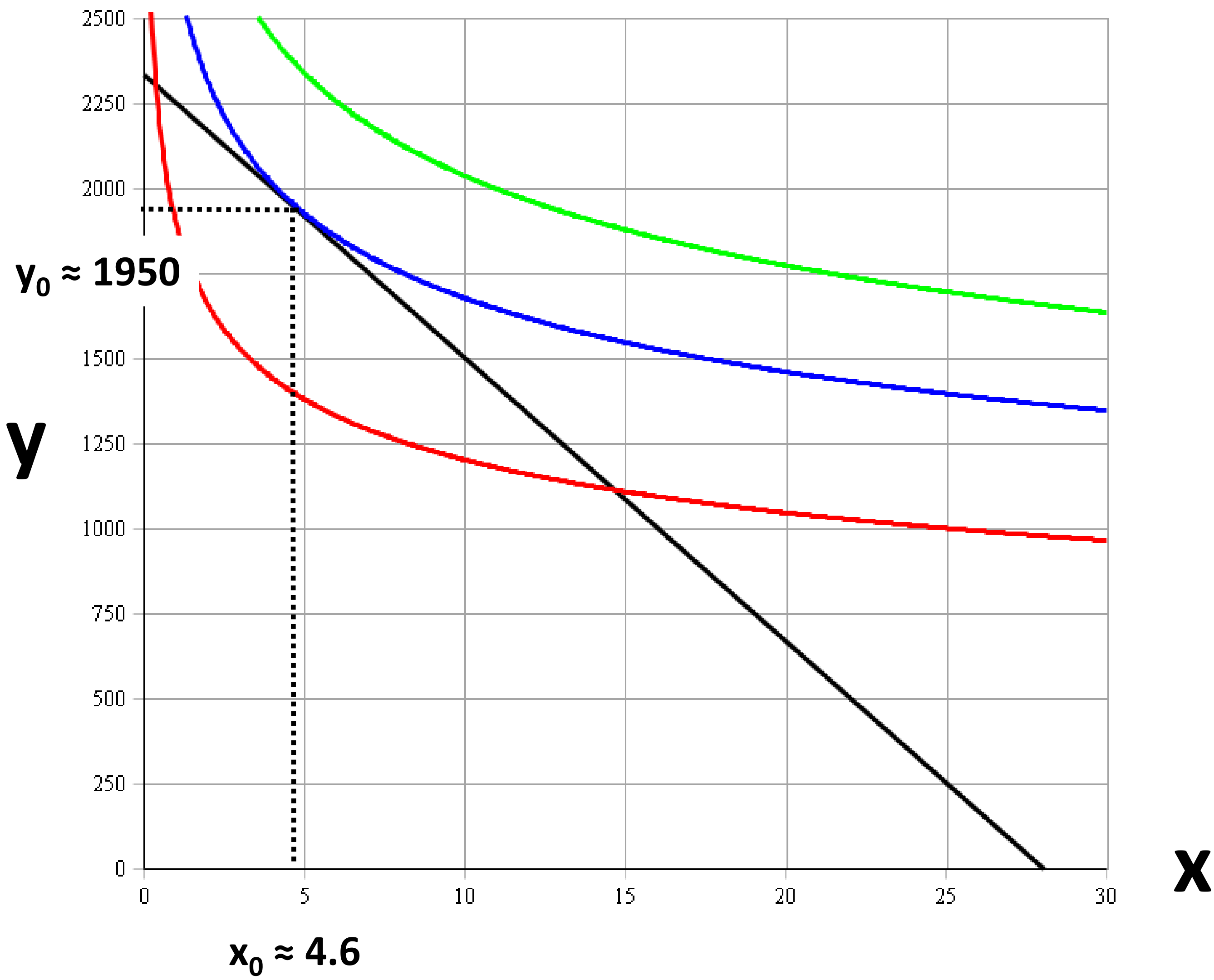
c) Se vedlegg B.

■

Vedlegg A: **Student nummer:** ____________________

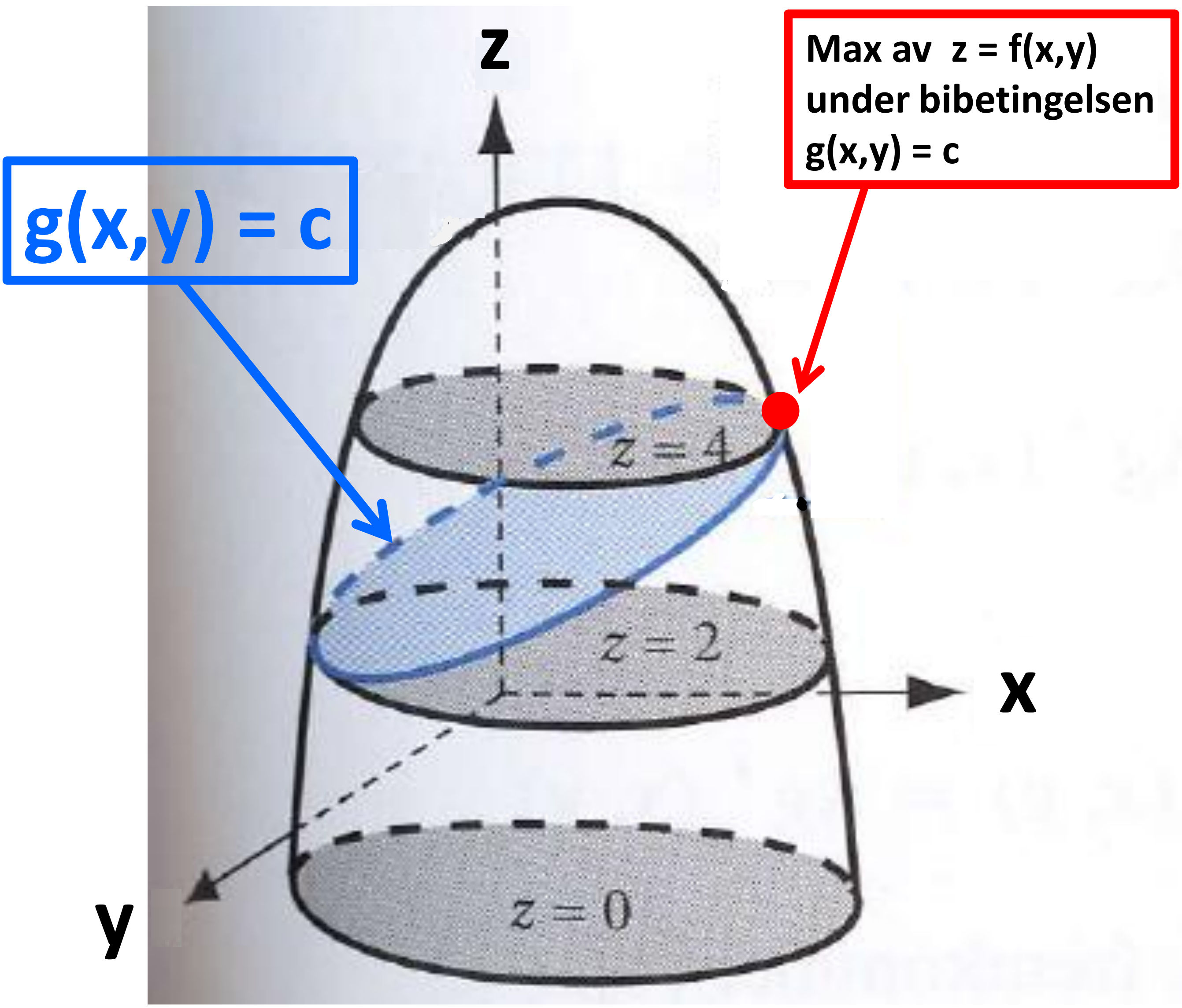
Verditabell:

x	0	10	15	25
y	2333.33	1500	1083.33	250



(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Vedlegg B: **Student nummer:** ____________________



(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Kapittel 5

LØSNING: Eksamen 18. des. 2014

"MAT100 Matematikk"

Oppgave 1: (logistikk og økonomi)

a) Fra lign.(1) i oppgavesettet ser vi at prisen på varmeovn av type 1 er $\underline{\underline{1\,200 \text{ NOK.}}}$ Og $\underline{\underline{1\,750 \text{ NOK}}}$ for type 2.

Fra den nederste ligningen i lign.(2) i oppgavesettet ser vi at det brukes $\underline{\underline{\text{en time}}}$ på å pakke hver av de to typene varmeovner.

b) Gjør om ulikhetene til likheter:

$$3X_1 + 3X_2 = 75 \qquad \text{(produksjon av komponenter)} \tag{5.1}$$

$$4\,X_1 + 8\,X_2 = 160 \qquad \text{(montering)} \tag{5.2}$$

$$X_1 + X_2 = 30 \qquad \text{(pakking)} \tag{5.3}$$

Flytter over X_1 på andre siden:

$$3X_2 = 75 - 3X_1 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{3} \tag{5.4}$$

$$8\,X_2 = 160 - 4\,X_1 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{8} \tag{5.5}$$

$$X_2 = 30 - X_1 \tag{5.6}$$

Løser ut X_2 alene:

$$
\begin{aligned}
X_2(X_1) &= 25 - X_1 && (5.7)\\
X_2(X_1) &= 20 - \frac{1}{2}X_1 && (5.8)\\
\underline{\underline{X_2(X_1) = 30 - X_1}} & \quad , \quad \text{q.e.d.} && (5.9)
\end{aligned}
$$

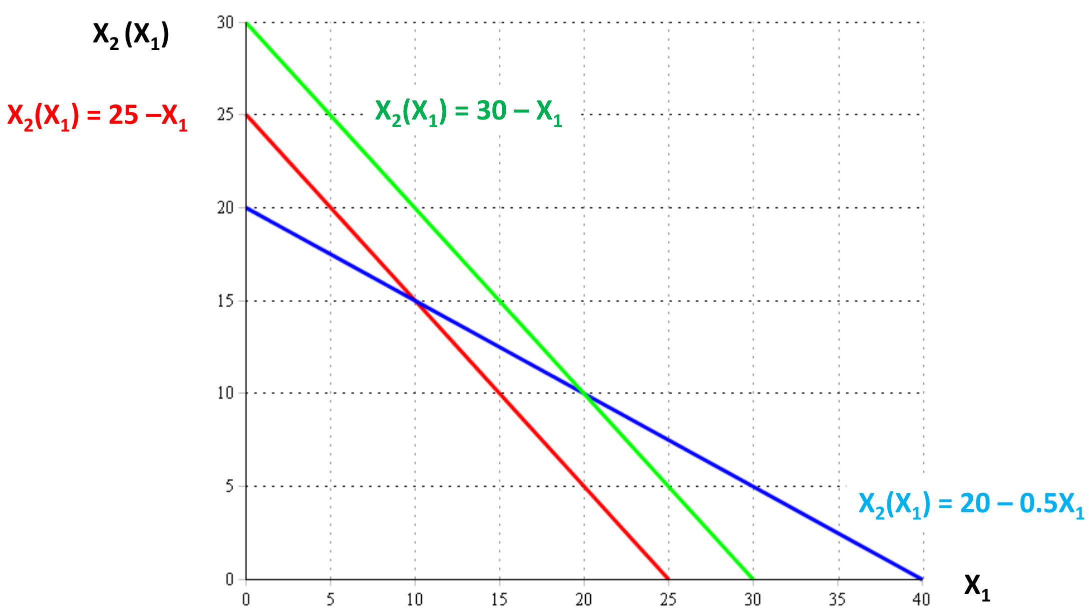
c) Verditabell: [1]

X_1	0	10	20	25
$X_2(X_1)$	25	15	5	0

X_1	0	10	20	40
$X_2(X_1)$	20	15	10	0

X_1	0	10	20	30
$X_2(X_1)$	30	20	10	0

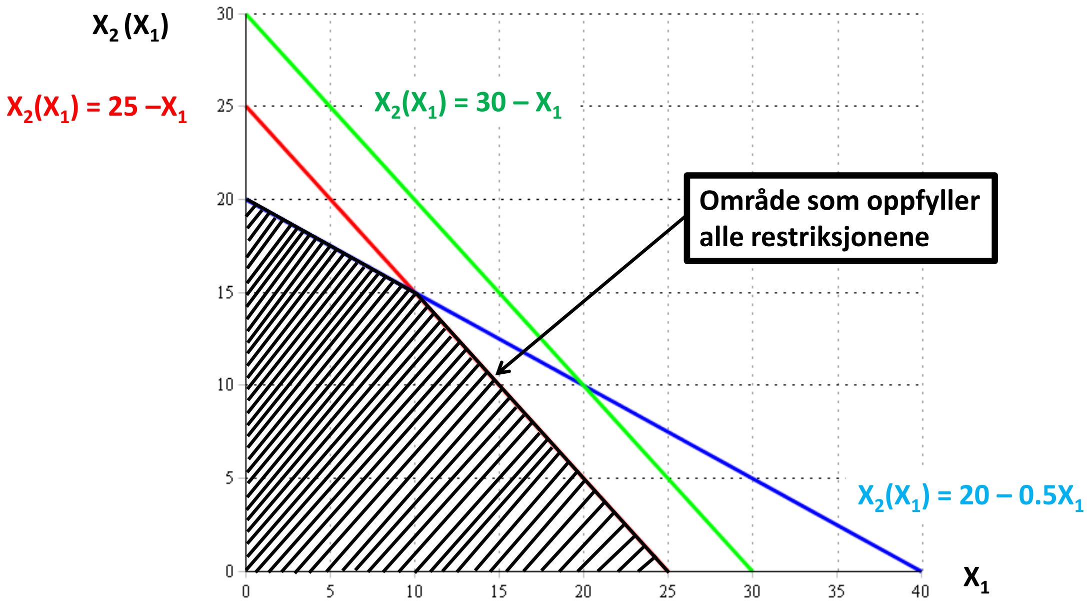
Figur 5.1: Verditabeller.



Figur 5.2: Plott av de lineære lign.(5.7), (5.8) og (5.9).

[1]Strengt tatt behøver man ikke mer enn 2 punkter i en verditabell for å bestemme en rette linje. Men av "sikkerhetsmessige" grunner er det svært lurt å ta flere enn to punkt, f.eks. 4 punkter slik som i verditabellene ovenfor.

d) Området i figuren som oppfyller alle restriksjonene:

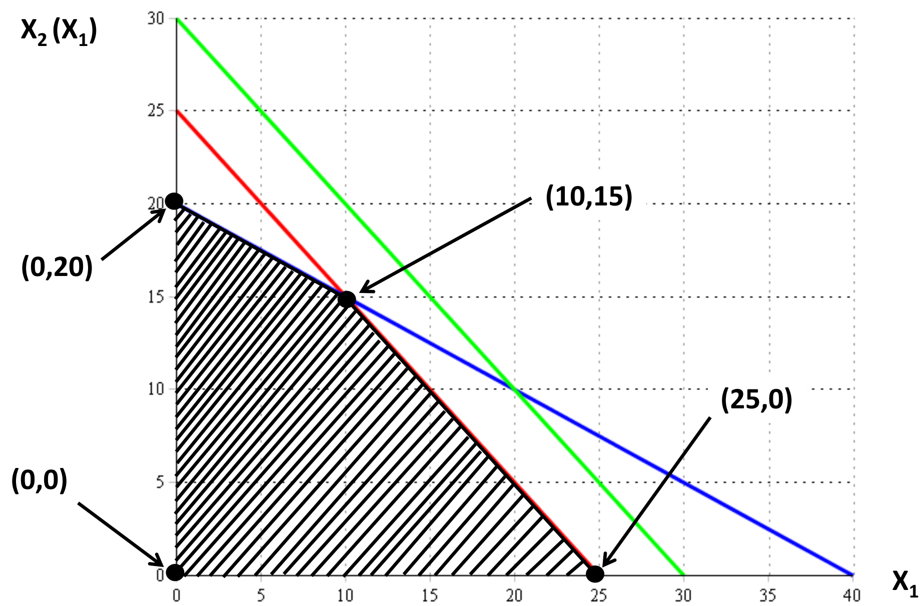


Figur 5.3: Området som oppfyller alle ulikhetene.

e) Den grønne linjen i figur (5.3) beskriver sammenhengen mellom X_1 og X_2 når det gjelder pakking.
Denne grønne linjen ligger i sin helhet *utenfor* det skraverte området.
Derfor vil ikke pakking for være en begrensende ressurs for noen mulige kombinasjoner av X_1 og X_2. [2]

[2]Med **mulige** kombinasjoner av X_1 og X_2 menes da alle mulige kombinasjoner innen det **skraverte** området.

f) i) Indikerer alle “hjørneløsninger”:



Figur 5.4: Hjørneløsninger.

ii) Inntekten $I(X_1, X_2)$ ved hjørnepunktene: [3]

$$\underline{\underline{I(0,0)}} = (1200 \cdot 0 + 1750 \cdot 0)\,\text{NOK} = \underline{\underline{0\ \ \text{NOK}}} \tag{5.10}$$

$$\underline{\underline{I(0,20)}} = (1200 \cdot 0 + 1750 \cdot 20)\,\text{NOK} = \underline{\underline{35\,000\ \ \text{NOK}}} \tag{5.11}$$

$$\underline{\underline{I(10,15)}} = (1200 \cdot 10 + 1750 \cdot 15)\,\text{NOK} = \underline{\underline{38\,250\ \ \text{NOK}}} \tag{5.12}$$

$$\underline{\underline{I(25,0)}} = (1200 \cdot 25 + 1750 \cdot 0)\,\text{NOK} = \underline{\underline{30\,000\ \ \text{NOK}}} \tag{5.13}$$

[3] Hjørnepunktet $(X_1, X_2) = (10, 15)$ er ikke så enkelt å finne eksakt når man bare leser av figuren. Derfor godtas svar som er i nærheten. MEN: siden den blå og den grønne linjen skjærer hverandre i denne hjørneløsningen så kan man også regne seg frem til dette svaret analytisk. Da finner man svaret eksakt. Det samme gjelder hjørnepunktene $(X_1, X_2) = (0, 20)$ og $(X_1, X_2) = (25, 0)$. En slik utregning kreves *ikke* på eksamen.

iii) **Maksimal** inntekt $I(X_1, X_2)$ når $\underline{\underline{X_1 = 10 \text{ og } X_2 = 15}}$: $\underline{\underline{I(10, 15) \;=\; 38\,250 \;\; \text{NOK}}}$

PS: Legg merke til at selv om det er fire hjørneløsninger så er det kun èn av dem som gir maksimal inntekt $I(X_1, X_2)$.

■

Oppgave 2: (petroleumslogistikk)

a) Rekken $a_i = u1.02^i$ er på formen $a_{i+1} = ka_i$, hvor $k =$ en konstant. [4]
Derfor er det en geometrisk rekke.

b) Summen av en geometrisk rekke er: [5]

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \tag{5.14}$$

For vår rekke er kvotienten $k = 1.02$ og $a_1 = 1.02u$. Dette setter vi inn i lign.(5.14):

$$\underline{\underline{S_n}} \overset{\text{lign.(5.14)}}{=} a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \tag{5.15}$$

$$= 1.02\, u \frac{1.02^n - 1}{1.02 - 1} = \frac{1.02}{1.02 - 1} u\,(1.02^n - 1) \tag{5.16}$$

$$= \underline{\underline{51u\,(1.02^n - 1)}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{5.17}$$

c) Siden vi antar at man ikke finner mer olje så må man tære på reservene. Altså:

$$R = S_n \tag{5.18}$$

Vi bruker svaret fra oppgave **2b**, dvs. lign.(5.17), og løser med hensyn på "n" alene:

$$R = 51u\,(1.02^n - 1) \qquad \Big| \cdot \frac{1}{51u} \tag{5.19}$$

$$\frac{R}{51u} = 1.02^n - 1 \tag{5.20}$$

$$\frac{R}{51u} + 1 = 1.02^n \tag{5.21}$$

[4] At verdien på denne konstanten er $k = 1.02$ er ikke viktig i denne deloppgaven.
[5] Se formelsamlingen dersom du ikke husker formelen i hodet.

For å "jekke ned" eksponenten "n" så tar vi "ln" på begge sider av ligningen:

$$\ln\left(\frac{R}{51u}+1\right) \quad = \quad \ln 1.02^{n} \tag{5.22}$$

$$\ln\left(\frac{R}{51u}+1\right) \quad = \quad n \, \ln 1.02 \tag{5.23}$$

hvor vi har brukt regnereglen $\ln a^{n} = n \ln a$.
Dermed: ved å dele på "$\ln 1.02$" på begge sider at lign.(5.23) så får vi:

$$\underline{\underline{n \; = \; \frac{\ln\left(\frac{R}{51u}+1\right)}{\ln 1.02}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{5.24}$$

d) For å finne ut hvor lang tid det tar det før man bruker opp oljereservene R så bruker vi bare resultatet fra oppgave **2c**, dvs. lign.(5.24):

$$\underline{n} \;\overset{\text{lign.(5.24)}}{=}\; \frac{\ln\left(\frac{R}{51u}+1\right)}{\ln 1.02} \tag{5.25}$$

$$= \quad \frac{\ln\left(\frac{1.33\cdot 10^{12}}{51\cdot 31.2\cdot 10^{9}}+1\right)}{\ln 1.02} \;\approx\; \underline{30.7} \tag{5.26}$$

Det tar $\underline{\underline{30.7 \text{ år}}}$ før oljereservene er brukt opp.

■

Oppgave 3: (finansmatematikk)

a) Formel S_n^{ann}:

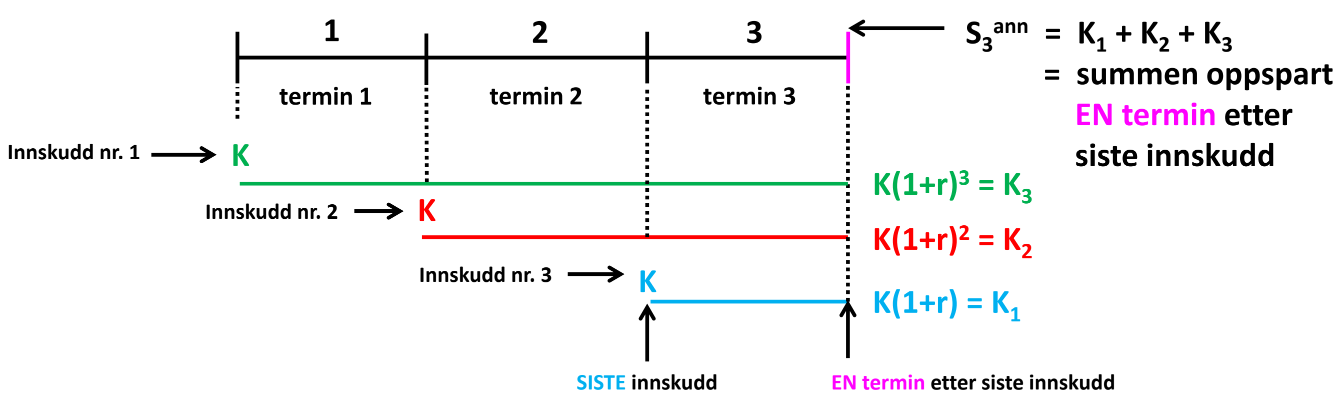
Formelen S_n^{ann} beskriver summen av oppspart kapital når man setter av samme kapitalen K ved begynnelsen av hver termin i n antall terminer.
Summen S_n^{ann} er da oppspart beløp èn termin etter siste termin n.

Formel K_0:

K_0 beskriver den nåverdien man må ha dersom man skal ta ut/betale tilbake samme beløp K i n terminer fremover.

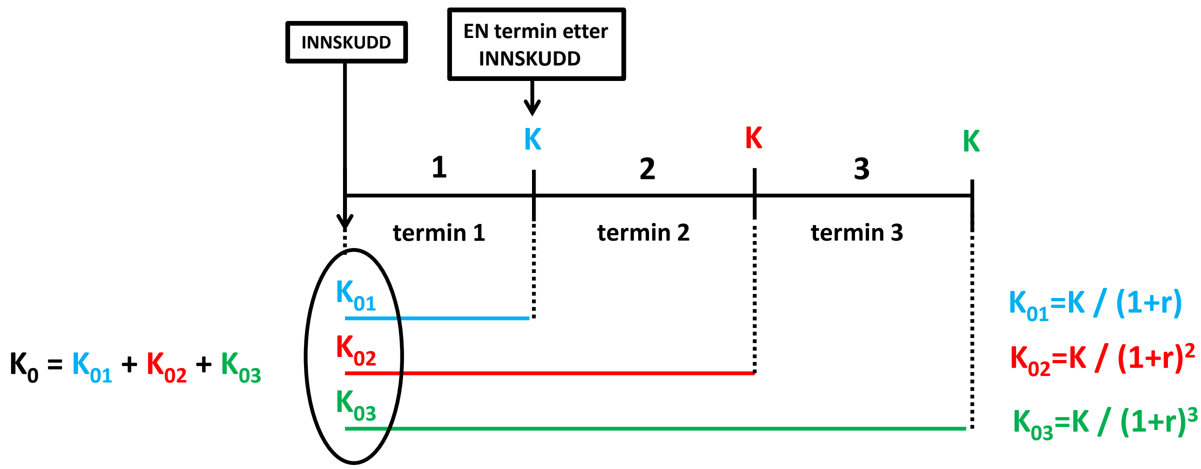
Begge formlene gjelder kun dersom renten r er konstant over alle n terminene.
I tillegg må selvsagt også renten være positiv $r > 0$, dvs. man kan ikke ha $r = 0$.

b) **Enkel figur** som illustrerer tidslinjen som beskrives av formelen S_3^{ann}:



Figur 5.5: Formelen S_3^{ann}.

c) **Enkel figur** som illustrerer tidslinjen som beskrives formelen K_0 for tilfellet med $n = 3$ terminer:



Figur 5.6: Formelen K_0.

d) Denne oppgaven dreier seg om oppsparingsannuitet.
Siden man skal finne oppspart beløp like etter at siste beløp er satt inn i banken så kan vi ikke bruke formelen som oppgitt i oppgaven.
Vi må bruke formelen for $S_n^{\text{ann, u}}$ som vi finner i formelsamlingen:

$$\underline{S_n^{\text{ann, u}}} = K \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \tag{5.27}$$

$$= 20\,000 \cdot \frac{(1+0.05)^{30} - 1}{0.05} \text{ NOK} \approx \underline{1\,328\,777 \text{ NOK}} \tag{5.28}$$

Ved oppsparing i 30 år og en rente på $r = 5$ % blir oppspart beløp rett etter siste innbetaling $\underline{\underline{1\,328\,777 \text{ NOK}}}$.

e) Siden beløpet vi fant i oppgave **3d** skal utbetales i faste beløp så er altså innskuddet/nåverdien:

$$K_0 = 1\,328\,777 \quad \text{NOK} \tag{5.29}$$

Oppgaven spør om hvor mye Anne kan ta ut i året fra hun er 70 år til hun er 90 år, dvs. $n = 20$. Oppgaven spør altså etter terminbeløpet K.
Formelen for terminbeløpet K finner man i formelsamlingen:

$$\underline{K} \quad = \quad K_0 \cdot \frac{r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \tag{5.30}$$

$$= \quad 1\,328\,777 \cdot \frac{0.05}{1 - \frac{1}{(1+0.05)^{20}}} \quad \text{NOK} \quad \approx \quad \underline{106\,625 \quad \text{NOK}} \tag{5.31}$$

Anne kan ta ut $\underline{\underline{K \; = \; 106\,625 \quad \text{NOK}}}$ hvert år fra hun er 70 år til hun blir 90 år.

f) Dersom Anne skal ta ut et fast beløp til evig tid så kan hun <u>kun leve på renten</u>. Hun kan ikke tære på innskuddet $K_0 = 1\,328\,777$ NOK. Renten er:

$$\underline{K} \quad = \quad K_0 \cdot r \tag{5.32}$$

$$= \quad 1\,328\,777 \cdot 0.05 \quad \text{NOK} \quad \approx \quad \underline{66\,439 \quad \text{NOK}} \tag{5.33}$$

Anne kan ta ut $\underline{\underline{K \; = \; 66\,439 \quad \text{NOK}}}$ hvert år til evig tid.

■

Oppgave 4: (Lagrange multiplikator)

a) Dette er et minimeringsproblem under en bibetingelse. Derfor er dette en situasjon som er godt egnet for å bruke Lagrange multiplikator.

Bibetingelsen er:

$$g(x,y) \;=\; 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y} \;=\; 360 \tag{5.34}$$

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$\boxed{F(x,y) \;=\; u(x,y) \;-\; \lambda\,[\,g(x,y) - c\,] \qquad (5.35)}$$

hvor $c = 360$ og $u(x,y) = 320x + 360y$. De stasjonære punktene til $F(x,y)$ er:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \;=\; 0 \qquad , \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \;=\; 0 \tag{5.36}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \lambda\,\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \;=\; 0 \qquad , \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - \lambda\,\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \;=\; 0 \tag{5.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(320x + 360y\Big) \;-\; \lambda\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(4\sqrt{x} + 6\sqrt{y}\Big) \;=\; 0 \tag{5.38}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(320x + 360y\Big) \;-\; \lambda\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(4\sqrt{x} + 6\sqrt{y}\Big) \;=\; 0 \tag{5.39}$$

$$320 \;-\; \lambda\,\frac{2}{\sqrt{x}} \;=\; 0 \tag{5.40}$$

$$360 \;-\; \lambda\,\frac{3}{\sqrt{y}} \;=\; 0 \tag{5.41}$$

$$160\sqrt{x} \;=\; \lambda \tag{5.42}$$

$$120\sqrt{y} \;=\; \lambda \tag{5.43}$$

De to ligningene i lign.(5.42) og (5.43) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x, y og λ. Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt ("entydig") løsning. Vi kan nå bruke "innsettingsmetoden" [6]. Siden λ ikke er en interessant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ i lign.(5.42) og (5.43):

$$\lambda = \lambda \tag{5.44}$$

$$160\sqrt{x} = 120\sqrt{y} \tag{5.45}$$

$$\frac{4}{3}\sqrt{x} = \sqrt{y} \tag{5.46}$$

og den uinteressante størrelsen λ er eliminert. Setter lign.(5.46) inn i bibetingelsen:

$$4\sqrt{x} + 6\sqrt{y} = 360 \tag{5.47}$$

$$4\sqrt{x} + 6\,\frac{4}{3}\sqrt{x} = 360 \tag{5.48}$$

$$12\sqrt{x} = 360 \tag{5.49}$$

$$\underline{x = 900} \tag{5.50}$$

som gir, f.eks. via lign.(5.46), $\underline{y} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 x = \left(\frac{4}{3}\right)^2 900 = \underline{1600}$.

Minimum for utgiften $u(x, y)$ inntreffer altså for punktet $(x, y) = (900, 1600)$.
For å minimere utgiften u_{min} bør Glamox bruke:

$$\underline{\underline{x = 900}} \quad \text{antall timer i produksjonen av "\textit{lux light}" ved fabrikken i USA} \tag{5.51}$$

$$\underline{\underline{y = 1600}} \quad \text{antall timer i produksjon av "\textit{lux light}" ved fabrikken i Molde} \tag{5.52}$$

når de skal produsere 360 "*lux light*" lamper.

[6] Med "innsettingsmetoden" mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

b) I oppgave **a** fant vi at $x = 900$ og $y = 1600$ vil minimere utgiften. Derfor:

$$\underline{u_{\text{min}}} = u(900, 1600) \tag{5.53}$$

$$= (\,320 \cdot 900 \;+\; 360 \cdot 1600\,)\ \text{NOK} \;=\; \underline{864\,000\ \ \text{NOK}} \tag{5.54}$$

Den minimale utgiften til Glamox er $\underline{\underline{864\,000\ \ \text{NOK}}}$.

■

Kapittel 6

LØSNING: Eksamen 5. juni 2015

"MAT100 Matematikk"

Oppgave 1: (teori)

a) Se vedlegg A.

b) Se vedlegg B.

■

Oppgave 2: (økonomi)

a) Grensekostnad:

$$\underline{\underline{K'(x)}} \;=\; \big(x^2 + 200x + 250\,000\big)' \;=\; \underline{\underline{2x + 200}} \tag{6.1}$$

b) i) Grensekostnaden for å produsere 150 telt, dvs. finn $K'(150)$.

$$\underline{\underline{K'(150)}} \;=\; 2 \cdot 150 + 200 \;=\; \underline{\underline{500}} \tag{6.2}$$

ii) Tolkning:

$K'(150) = 500$ betyr at dersom man produserer og selger 150 telt og ønsker å produsere ett ekstra telt så har dette en merkostnad på 500 NOK.

c) Siden

$$\underline{\underline{K'(x)}} \;=\; 2x + 200 \;\; \underline{\underline{\geq 0}} \tag{6.3}$$

for $0 \leq x \leq 800$ så er $K(x)$ voksende.

d) Med inntektsfunksjonen:

$$\underline{\underline{I(x)}} \;=\; x \cdot p(x) \;=\; x(3200 - 4x) \;=\; \underline{\underline{-4x^2 + 3200x}} \tag{6.4}$$

så er fortjenesten $F(x) = I(x) - K(x)$ er gitt ved:

$$\underline{\underline{F(x)}} \;=\; I(x) - K(x) \tag{6.5}$$

$$\;=\; -4x^2 + 3200x - \big(x^2 + 200x + 250\,000\big) \;=\; \underline{\underline{-5x^2 + 3000x - 250\,000}} \tag{6.6}$$

e) For å finne de verdiene av x slik at $F(x) > 0$ så må vi første faktorisere $F(x)$. Deretter setter vi opp et fortegnsskjema. Ut fra fortegnsskjemaet finner vi det oppgaven spør om.

For å faktorisere en andregradsligningen $F(x)$, dvs. lign.(6.6), så må vi første finne nullpunkene til $F(x)$. Bruker ABC-formelen:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{6.7}$$

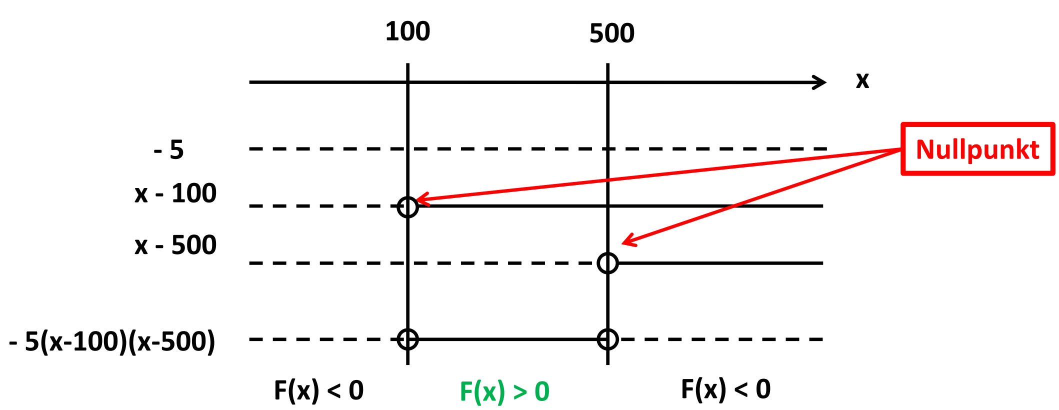
$$x_1 = \frac{-3000 + \sqrt{3000^2 - 4(-5)(-250\,000)}}{2(-5)} \quad , \quad x_2 = \frac{-3000 - \sqrt{3000^2 - 4(-5)(-250\,000)}}{2(-5)}$$

$$\underline{x_1 = 100} \quad , \quad \underline{x_2 = 500} \tag{6.8}$$

Når vi nå har nullpunktene så kan vi faktorisere $F(x)$:

$$\underline{F(x)} \;=\; a(x - x_1)(x - x_2) \;=\; \underline{-5(x - 100)(x - 500)} \tag{6.9}$$

Fortegnsskjema: [1]



Figur 6.1: Fortegnsskjema for lign.(6.9).

Ut fra fortegnsskjema ser vi at Rofi går med overskudd, dvs. $F(x) > 0$, når:

$$\underline{\underline{100 \;<\; x \;<\; 500}} \tag{6.10}$$

[1] Også kalt drøftingsskjema.

f) i) Antall telt som må produseres og selges for å **maksimere** fortjenesten:

$$F'(x) = 0 \tag{6.11}$$

$$\frac{d\,F(x)}{dx} = 0 \tag{6.12}$$

$$\frac{d}{dx}\Big(-5x^2 + 3000x - 250\,000 \Big) = 0 \tag{6.13}$$

$$-10x + 3000 = 0 \tag{6.14}$$

$$x = 300 \tag{6.15}$$

For å maksimere fortjenesten må Rofi produsere og selge $\underline{\underline{300}}$ telt.

ii) Siden

$$F''(x) = -10 \; < \; 0 \tag{6.16}$$

så er $F(x)$ konkav og vi har ett enkelt stasjonært punkt i $x = 300$ som representerer et maksimum.

iii) Maksimal fortjeneste:

$$\underline{F(300)} = \big(-5 \cdot 300^2 + 3000 \cdot 300 - 250\,000 \big) \text{ NOK} = \underline{200\,000 \text{ NOK}} \tag{6.17}$$

Rofi sin maksimale fortjeneste er $\underline{\underline{200\,000 \text{ NOK}}}$.

g) Enhetskostnaden $TEK(x)$ er:

$$\underline{TEK(x)} = \frac{K(x)}{x} \tag{6.18}$$

$$= \frac{x^2 + 200x + 250\,000}{x} = \underline{x + 200 + \frac{250\,000}{x}} \tag{6.19}$$

Deriverer:

$$\underline{TEK'(x)} = \frac{d}{dx}\left(x + 200 + \frac{250\,000}{x}\right) = \underline{1 - \frac{250\,000}{x^2}} \tag{6.20}$$

Minste enhetskostnad finner man når den deriverte er null:

$$TEK'(x) = 0 \tag{6.21}$$

som gir:

$$\underline{x} = \sqrt{250\,000} = \underline{500} \tag{6.22}$$

Tilhørende enhetskostnad:

$$\underline{TEK(500)} = \left(500 + 200 + \frac{250\,000}{500}\right) \text{NOK} = \underline{1200 \text{ NOK}} \tag{6.23}$$

Siden

$$\underline{TEK''(x)} = \frac{d^2}{dx^2}\left(x + 200 + \frac{250\,000}{x}\right) = \frac{2 \cdot 250\,000}{x^3} \underline{\geq 0} \tag{6.24}$$

for $0 \leq x \leq 800$ så er $TEK(x)$ konveks, og $x = 500$ er et globalt minimum.

Altså:
Minimum enhetskostnad inntreffer når Rofi produserer og selger $\underline{\underline{x = 500}}$ telt.
Enhetskostnaden er da $\underline{\underline{TEK(500) = 1200 \text{ NOK}}}$.

h) Maksimal profitt: $F(300) = 200\,000$ NOK.
Minimal enhetskostand: $TEK(500) = 1200$ NOK.

Ved sammenligning ser vi at maksimal fortjeneste og minimal enhetskostnad <u>ikke</u> inntreffer for samme verdi for x.

i) %-vis endring: ($x_0 = 675$ og $x_1 = 540$)

$$\underline{\underline{\% - \text{vis endring}}} = \frac{p(540) - p(675)}{p(675)} \cdot 100\,\% \tag{6.25}$$

$$= \frac{\cancel{3200} - 4x_1 - (\cancel{3200} - 4x_0)}{3200 - 4x_0} \cdot 100\,\% \tag{6.26}$$

$$= \frac{4(x_0 - x_1)}{3200 - 4x_0} \cdot 100\,\% = \frac{4 \cdot (675 - 540)}{3200 - 4 \cdot 675} \cdot 100\,\% = \underline{\underline{108\ \%}} \tag{6.27}$$

<u>PS</u>:

1) Endringen er altså positiv, dvs. prisen øker.

2) En *endring* kan være mer enn 100 % slik som i dette tilfellet.

■

Oppgave 3: (økonomi og finansmatematikk)

a) Renteformelen: [2]

$$\underline{K_5} \;=\; K_0(1+r_{\text{inn}})^5 \;=\; 100\,000\big(1+0.25\big)^5 \text{ euro} \;=\; \underline{305\,176 \text{ euro}} \tag{6.28}$$

Etter 5 år har kapitalen vokst til $\underline{\underline{K_5 = 305\,176 \text{ euro}}}$.

b) Uttrykket for nåverdien finner man på side 55 i formelsamlingen fra 2014.
I oppgaven står det at det er inflasjonen reduserer bankinnskuddet.
Derfor er det $r_{\text{inf}} = 0.50$ som inngår i formelen for nåverdi for vårt tilfelle.
Med notasjonen $K_{0\,,\,b}$ blir derfor vår formel for nåverdi:

$$K_{0\,,\,b} \;=\; \frac{K_n}{(1+r_{\text{inf}})^n} \tag{6.29}$$

Med $K_5 = 305\,176$ euro fra lign.(6.28) får vi:

$$\underline{K_{0\,,\,b}} \;=\; \frac{K_5}{(1+r_{\text{inf}})^5} \;=\; \frac{305\,176}{(1+0.50)^5} \text{ euro} \;=\; \underline{40\,189 \;\text{ euro}} \tag{6.30}$$

Dersom vi setter $K_0 = 100\,000$ euro i banken i 5 år så vil inflasjonen være så stor at nåverdien av $K_5 = 306\,176$ euro er $\underline{\underline{K_{0\,,\,b} = 40\,189 \text{ euro}}}$.

c) Ved å sette $K_0 = 100\,000$ euro i banken i 5 år så vil inflasjonen gjøre at verdien av kapitalen K_5 har redusert seg til nåverdien $K_{0\,,\,b} = 40\,189$ euro, altså mer enn halvert: $100\,000$ euro $\longrightarrow$ $40\,189$ euro

Med andre ord: <u><u>man taper på å sette pengene i banken</u></u>. [3]

[2] Se f.eks. side 54 i formelsamlingen fra 2014.

[3] At man taper penger på å sette penger i banken kan man innse umiddelbart siden inflasjonen $r_{\text{inf}} = 0.50$ er større enn innskuddsrenten $r_{\text{inn}} = 0.25$.

d) Saldoen etter n år er oppgitt i oppgaven:

$$S_n \;=\; K_0 \cdot k^n - B\underbrace{\left(1 + k + k^2 + .. + k^{n-1}\right)}_{\text{geometrisk rekke}} \tag{6.31}$$

Summen i lign.(6.31) kan skrives:

$$S_n \;=\; K_0 \cdot k^n \;-\; B\sum_{i=0}^{n-1} k^i \tag{6.32}$$

I denne rekken starter summasjonsindeksen på $i = 0$ og slutter på $i = n - 1$.
Altså totalt n ledd.
Summen av den **geometriske rekken** i formelsamlingen fra 2014 starter derimot på $i = 1$ og slutter på $i = n$. Men fortsatt n ledd, dvs. samme antall ledd.
Om summasjonsindeksen starter på 0 eller 1 spiller ingen rolle så lenge vi har med samme antall ledd. Dermed kan vi bruke formelen i lign. (5.11) i formelsamlingen fra 2014 direkte og får: [4]

$$\underline{\underline{S_n \;=\; K_0 \cdot k^n \;-\; B\,\frac{k^n - 1}{k - 1}}} \tag{6.38}$$

hvor $\quad k \equiv 1 + r_{\text{inn}}$.

[4] Man kan velge om man bare vil si det med ord, som i hovedteksten ovenfor, eller om man vil regne på det: I lign.(5.10) i formelsamlingen fra 2014 står det:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n \tag{6.33}$$

I formelsamlingen står det også at en geometrisk rekke er definert ved:

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = 1 \tag{6.34}$$

Dette innsatt i lign.(6.33) gir

$$S_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n \tag{6.35}$$

$$\;=\; a_1 + a_1k + a_1k^2 + ... + a_1k^{n-1} \tag{6.36}$$

$$\;=\; a_1\left(1 + k + k^2 + ... + k^{n-1}\right) = a_1\sum_{i=0}^{n-1} k^i \tag{6.37}$$

Men denne ligningen er akkurat det oppgaven spør om, se lign.(6.32). Derfor kan vi bare bruke formelen i formalsamlingen direkte. Og man får lign.(6.38).

e) Saldoen er brukt opp etter når $S_n = 0$. Fra lign.(6.38) har vi da:

$$0 \;=\; K_0 \cdot k^n \;-\; B\,\frac{k^n - 1}{k - 1} \tag{6.39}$$

Løser med hensyn på B alene:

$$B \;=\; \frac{K_0 \cdot k^n}{\frac{k^n - 1}{k - 1}} \tag{6.40}$$

Siden $k \equiv 1 + r_{\text{inn}} = 1 + 0.25 = 1.25$ så får vi etter $n = 5$ år:

$$\underline{B} \;=\; \frac{100\,000 \cdot 1.25^5}{\frac{1.25^5 - 1}{1.25 - 1}}\ \text{euro} \;=\; \underline{37\,185\ \text{euro}} \tag{6.41}$$

Dersom du skal bruke opp saldoen S_n etter 5 år så kan du ta ut beløpet
$\underline{\underline{B = 37\,185\ \text{euro}}}$ hvert år.

f) Den årlige renten man betaler på et lån med størrelse x dersom renten er r,
er $x \cdot r$.
Det årlige beløpet $B = 37\,185$ skal brukes til å betale disse årlige rentene. Dermed:

$$x \cdot r = B \tag{6.42}$$

Løser med hensyn på x:

$$\underline{x} \;=\; \frac{B}{r} \;=\; \frac{37\,185}{0.30}\ \text{euro} \;=\; \underline{123\,950\ \text{euro}} \tag{6.43}$$

Du kan ta opp $\underline{\underline{x = 123\,950\ \text{euro}}}$ i lån i banken dersom du bruker det årlige beløpet B til å holde rentene "i sjakk".

g) Kapitalen $K_{n\,,\,e}$ du sitter igjen med er verdien av eiendommen V_n minus lånets størrelse x. Etter $n = 5$ år har vi da:

$$\underline{K_{5\,,\,e}} = V_5 - x \tag{6.44}$$

$$= x \cdot (1 + r_{\text{inf}})^5 - x \tag{6.45}$$

$$= x \cdot \Big((1 + r_{\text{inf}})^5 - 1 \Big) \tag{6.46}$$

$$= 123\,950 \cdot \big((1 + 0.50)^5 - 1 \big) \text{ euro} = \underline{817\,295 \ \text{ euro}} \tag{6.47}$$

Kapitalen du sitter igjen med etter 5 år er $\underline{\underline{K_{5\,,\,e} = 817\,295 \quad \text{euro}}}$ dersom du investerer i eiendom.

h) Uttrykket for nåverdien finner man på side 55 i formelsamlingen fra 2014:

$$K_{0\,,\,e} = \frac{K_{5\,,\,e}}{(1 + r_{\text{inf}})^5} \tag{6.48}$$

Det er altså inflasjonen $r_{\text{inf}} = 0.50$ som bestemmer nåverdien for kapitalen som er bundet opp i eiendom.

Setter inn tallene:

$$\underline{K_{0\,,\,e}} = \frac{K_{5\,,\,e}}{(1 + r_{\text{inf}})^5} = \frac{817\,295}{(1 + 0.50)^5} \text{ euro} = \underline{107\,627 \text{ euro}} \tag{6.49}$$

Dersom vi setter $K_0 = 100\,000$ euro i banken og tar ut et fast beløp $B = 37\,185$ euro i året fra dette innskuddet for å betjene et lån på $x = 123\,950$ euro som du investerer i eiendom så vil nåverdien av kapitalen være $\underline{\underline{K_{0\,,\,e} = 107\,627 \text{ euro}}}$ etter 5 år.

i) Nåverdien $K_{0\,,\,b}$ ved å sette pengene i banken: $K_{0\,,\,b} = 40\,189$ euro
Nåverdien $K_{0\,,\,e}$ ved å investere i eiendom: $K_{0\,,\,e} = 107\,627$ euro

Konklusjon:

Det er mye bedre å investere i eiendom enn å la pengene passivt stå i banken. [5]

■

[5] Denne konklusjonen kan vi innse umiddelbart av samme grunn som nevnt i fotnoten til oppgave **3b**: Det lønner seg å investere i eiendom, som følger inflasjonen, enn å la pengene bare stå passivt i banken siden inflasjonen $r_{\text{inf}} = 0.50$ er større enn innskuddsrenten $r_{\text{inn}} = 0.25$.

Oppgave 4: (logistikk og økonomi)

a) Dette er et minimeringsproblem under en bibetingelse. Derfor er dette en situasjon som er godt egnet for å bruke Lagrange multiplikator.

Av åpenbare grunner er $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Dessuten er bibetingelsen:

$$g(x,y) \; = \; x + y \; = \; 500 \tag{6.50}$$

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$\boxed{F(x,y) \; = \; K(x,y) \; - \; \lambda \, g(x,y) \qquad (6.51)}$$

hvor $K(x,y) = x^2 + 500x \; + \; y^2 + 300y$. De stasjonære punktene til $F(x,y)$ er:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \; = \; 0 \qquad , \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \; = \; 0 \tag{6.52}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \; = \; 0 \qquad , \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \; = \; 0 \tag{6.53}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 500x \; + \; y^2 + 300y \right) \; - \; \lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(x + y \right) \; = \; 0 \tag{6.54}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 500x \; + \; y^2 + 300y \right) \; - \; \lambda \frac{\partial}{\partial y}\left(x + y \right) \; = \; 0 \tag{6.55}$$

$$2x + 500 \; - \; \lambda \; = \; 0 \tag{6.56}$$

$$2y + 300 \; - \; \lambda \; = \; 0 \tag{6.57}$$

$$2x + 500 \; = \; \lambda \tag{6.58}$$

$$2y + 300 \; = \; \lambda \tag{6.59}$$

De to ligningene i lign.(6.58) og (6.59) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x, y og λ. Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt ("entydig") løsning. Vi kan nå bruke "innsettingsmetoden" [6]. Siden λ ikke er en interessant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ i lign.(6.58) og (6.59):

$$\lambda = \lambda \tag{6.60}$$

$$2x + 500 = 2y + 300 \tag{6.61}$$

$$x = y - 100 \tag{6.62}$$

og den uinteressante størrelsen λ er eliminert. Setter lign.(6.62) inn i bibetingelsen:

$$x + y = 500 \tag{6.63}$$

$$y - 100 + y = 500 \tag{6.64}$$

$$2y = 600 \tag{6.65}$$

$$\underline{y = 300} \tag{6.66}$$

som gir, f.eks. via lign.(6.62), $\underline{x} = y - 100 = \underline{200}$.

Minimal kostand for $K(x, y)$ inntreffer altså for punktet $(x, y) = (200, 300)$.
For å minimere utgiften K_{min} bør NEAS produsere og levere:

$$\underline{\underline{x = 200}} \quad \text{antall MWh per døgn ved Reinset kraftverk} \tag{6.67}$$

$$\underline{\underline{y = 300}} \quad \text{antall MWh per døgn ved Ulvund kraftverk} \tag{6.68}$$

når de skal levere 500 MWh per døgn til Norsk Hydro på Sunndalsøra.

[6] Med "innsettingsmetoden" mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

b) I oppgave **4a** fant vi at $x = 200$ og $y = 300$ vil minimere kostnaden $K(x, y)$. Derfor:

$$\underline{K_{\min}} = K(200, 300) \tag{6.69}$$

$$= (\,200^2 + 500 \cdot 200 \;+\; 300^2 + 300 \cdot 300\,)\ \text{NOK} \;=\; \underline{320\,000\ \ \text{NOK}} \tag{6.70}$$

Den minimale kostnaden for NEAS per døgn er $\underline{\underline{320\,000\ \ \text{NOK}}}$ for de to kraftverkene.

■

Vedlegg A

Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

Studentnummer: ______________________________

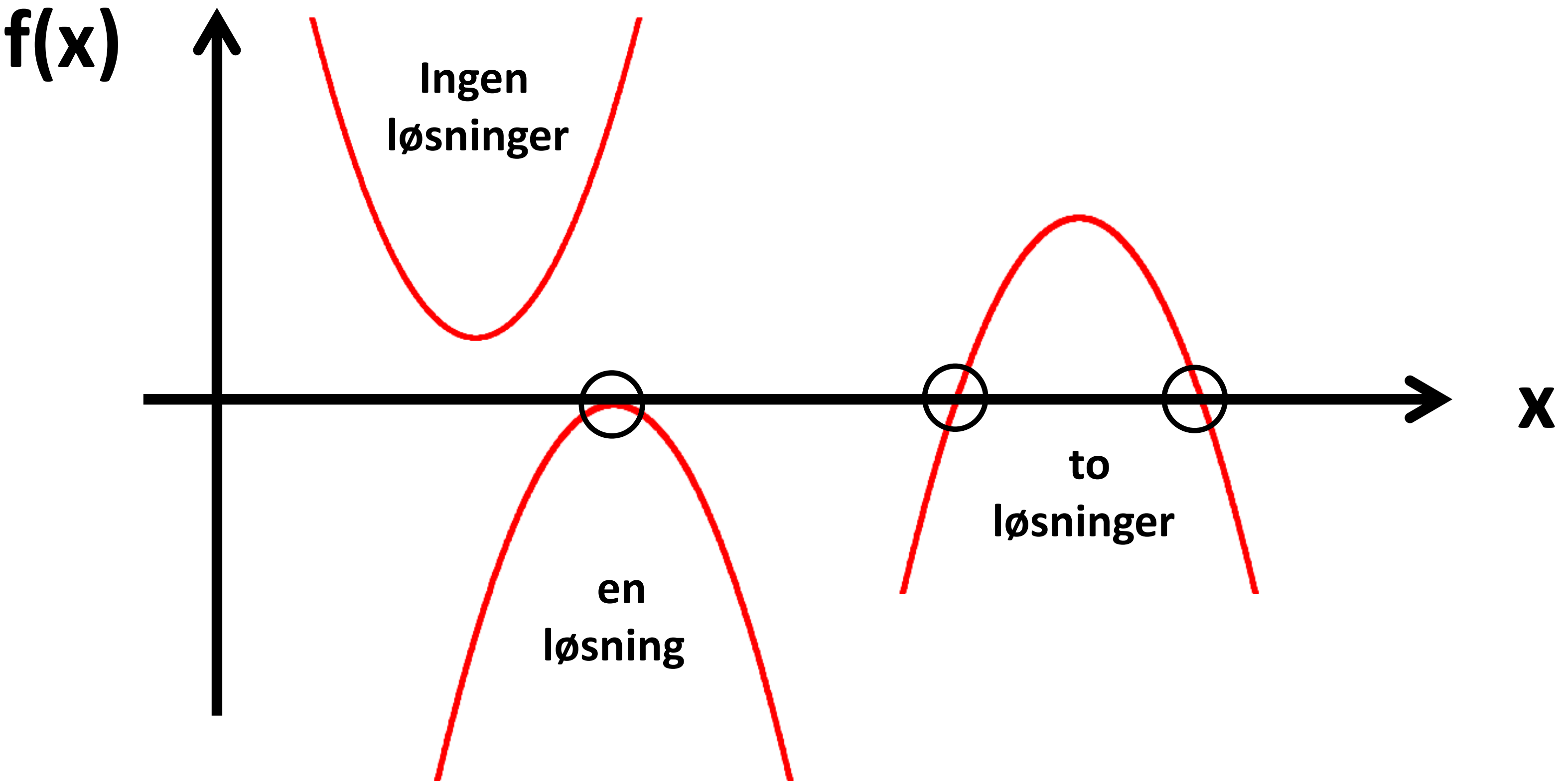
Diskriminant	Antall løsninger
$b^2 - 4ac > 0$	2 løsninger
$b^2 - 4ac = 0$	1 løsning
$b^2 - 4ac < 0$	ingen løsning

(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Vedlegg B

Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

Studentnummer: ___________________________



(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Kapittel 7

LØSNING: Eksamen 17. des. 2015

"MAT100 Matematikk"

Oppgave 1: (økonomi)

a) I optimum av $TR(x)$ er

$$\frac{dTR(x)}{dx} = 0 \tag{7.1}$$

som gir

$$\frac{d}{dx}\Big(I(x) - K(x) \Big) = 0 \tag{7.2}$$

$$\frac{dI(x)}{dx} - \frac{dK(x)}{dx} = 0 \tag{7.3}$$

$$\frac{dI(x)}{dx} = \frac{dK(x)}{dx} \tag{7.4}$$

dvs.

$$\underline{\underline{\text{grenseinntekt} = \text{grensekostnad}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{7.5}$$

b) Grensekostand = ekstrakostnaden ved å produsere en ekstra enhet [1]

[1] Tilsarende gjelder også for grenseinntekt. (Men det trenger man ikke nevne på eksamen).

c) Det **totale resultatet** $TR(x)$ for Ello er gitt ved:

$$\underline{\underline{TR(x)}} \stackrel{\text{def.}}{=} I(x) \; - \; K(x) \tag{7.6}$$

$$= p \cdot x \; - \; K(x) \tag{7.7}$$

$$= p \cdot x \; - \; \left(ax^2 + bx + c \right) \tag{7.8}$$

$$= p \cdot x \; - \; ax^2 - bx - c \tag{7.9}$$

$$= \underline{\underline{(p-b)x - ax^2 - c}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{7.10}$$

d) Det totale resultatet $TR(x)$ oppnår sitt **optimum**, i dette tilfellet maksimum, når den deriverte er lik null:

$$\text{stigningstallet} = 0 \tag{7.11}$$

$$\frac{d\,TR(x)}{dx} = 0 \tag{7.12}$$

$$\frac{d}{dx}\left((p-b)x - ax^2 - c \right) = 0 \tag{7.13}$$

$$(p-b) - a2x = 0 \tag{7.14}$$

$$(p-b) = a2x \tag{7.15}$$

$$\underline{\underline{x_{max} = \frac{p-b}{2a}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{7.16}$$

e) Den 2. deriverte av $TR(x)$: [2]

$$\underline{\frac{d^2TR(x)}{dx^2}} = \frac{d^2}{dx^2}\Big((p-b)x - ax^2 - c \Big) \tag{7.17}$$

$$= \frac{d}{dx}\Big((p-b) - 2ax \Big) \tag{7.18}$$

$$= \underline{-2a} \tag{7.19}$$

er negativ siden $a > 0$. Dermed er $TR(x)$ konkav og betingelsen i lign.(7.5) representerer et maksimum og ikke et minimum av $TR(x)$.

f) Det **maksimale** totale resultatet $TR_{max} \equiv TR(x_{max})$ er:

$$\underline{\underline{TR_{max}}} = TR(x_{max}) \tag{7.20}$$

$$= (p-b)x_{max} - ax_{max}^2 - c \tag{7.21}$$

$$= (p-b)\,\frac{p-b}{2a} - a\left(\frac{p-b}{2a}\right)^2 - c \tag{7.22}$$

$$= \frac{(p-b)^2}{2a} - \frac{(p-b)^2}{4a} - c \tag{7.23}$$

$$= \underline{\underline{\frac{(p-b)^2}{4a} - c}} \tag{7.24}$$

[2] 2. derivasjonstesten. Se formelsamlingen.

g) Antall liter såpe må Ello produsere per måned for å maksimere $TR(x)$:

$$\underline{\underline{x_{max}}} \overset{\text{lign.(7.16)}}{=} \frac{p-b}{2a} \tag{7.25}$$

$$= \frac{(\,22-10\,)\,\frac{\cancel{\text{NOK}}}{\cancel{\text{liter}}}}{2\cdot 0.001\,\frac{\cancel{\text{NOK}}}{\text{liter}\cancel{^2}}} \;=\; \underline{\underline{6\,000 \text{ liter}}} \tag{7.26}$$

h) Maksimalt resultat TR_{max} som Ello kan oppnå per måned:

$$\underline{\underline{TR_{max}}} \overset{\text{lign.(7.24)}}{=} \frac{(p-b)^2}{4a} - c \tag{7.27}$$

$$= \left(\frac{(\,22-10\,)^2}{4\cdot 0.001} \;-\; 3\,000\right) \text{NOK} \;=\; \underline{\underline{33\,000 \text{ NOK}}} \tag{7.28}$$

■

Oppgave 2: (finansmatematikk)

a) Formel S_n^{ann}:

Formelen S_n^{ann} beskriver summen av oppspart kapital når man setter av samme kapitalen K ved begynnelsen av hver termin i n antall terminer.
Summen S_n^{ann} er da oppspart beløp èn termin etter siste termin n.

Formel K_0:

K_0 beskriver den nåverdien man må ha dersom man skal ta ut/betale tilbake samme beløp K i n terminer fremover.

Begge formlene gjelder kun dersom renten r er konstant over alle n terminene.
I tillegg må selvsagt også renten være positiv $r > 0$, dvs. man kan ikke ha $r = 0$.

b) Formelen for S_n^{ann} var oppgitt i oppgaven:

$$S_n^{\text{ann}} = K(1+r)\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} \tag{7.29}$$

Løser med hensyn på K alene:

$$\begin{aligned}
S_n^{\text{ann}} &= K(1+r)\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} && \Big|\ \cdot \frac{1}{(1+r)} && (7.30)\\
\frac{S_n^{\text{ann}}}{(1+r)} &= K\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} && \Big|\ \cdot r && (7.31)\\
\frac{rS_n^{\text{ann}}}{(1+r)} &= K\Big[(1+r)^n - 1\Big] && \Big|\ \cdot \frac{1}{(1+r)^n - 1} && (7.32)
\end{aligned}$$

som gir:

$$\underline{\underline{K = \frac{rS_n^{\text{ann}}}{(1+r)\Big[\,(1+r)^n - 1\,\Big]}}} \quad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{7.33}$$

c) Oppgaven dreier seg om **oppsparingannuitet**.

Dersom man ønsker å spare til $S_n^{\text{ann}} = 100\,000$ NOK etter 4 år, èn termin etter at siste beløp er satt av, så er det bare å bruke formlen fra oppgave **2b** når man skal finne det månedelige beløpet K man må sette av:

$$\underline{K} = \frac{rS_n^{\text{ann}}}{(1+r)\Big[(1+r)^n - 1\Big]} \tag{7.34}$$

$$= \frac{0.00375 \cdot 100\,000}{(1+0.00375)\Big[(1+0.00375)^{48} - 1\Big]} \text{ NOK} \tag{7.35}$$

$$= \underline{1898.23 \;\; \text{NOK}} \tag{7.36}$$

Du må sette av $\underline{\underline{K = 1898.23 \text{ NOK}}}$ per måned for å få 100 000 NOK etter 4 år.

d) Formelen for S_n^{ann} var oppgitt i oppgaven:

$$S_n^{\text{ann}} = K(1+r)\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} \tag{7.37}$$

Løser med hensyn på n alene:

$$S_n^{\text{ann}} = K(1+r)\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{K(1+r)} \tag{7.38}$$

$$\frac{S_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} = \frac{(1+r)^n - 1}{r} \qquad \Big| \cdot r \tag{7.39}$$

$$\frac{rS_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} = (1+r)^n - 1 \qquad \text{flytter “1” på andre siden} \tag{7.40}$$

$$\frac{rS_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} + 1 = (1+r)^n \tag{7.41}$$

Ta logaritmen ln på begge sider av forrige ligning. Da får man:

$$\ln(1+r)^n = \ln\left(\frac{rS_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} + 1\right) \tag{7.42}$$

$$n \cdot \ln(1+r) = \ln\left(\frac{rS_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} + 1\right) \qquad \Big| \cdot \frac{1}{\ln(1+r)} \tag{7.43}$$

som gir:

$$\underline{\underline{n = \frac{\ln\left(\frac{rS_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} + 1\right)}{\ln(1+r)}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{7.44}$$

e) Også denne oppgaven dreier seg om **oppsparingannuitet**.
Vi finne hvor mange måneder vi må sette av beløpet fra oppgave **2c**, dvs.

$$K = 1898.23 \ \ \text{NOK} \tag{7.45}$$

for å oppnå samme totale oppsparte beløp, $S_n^{\text{ann}} = 100\,000$ NOK, èn måned etter at siste beløp er satt av, når renten har økt til:

$$r = \frac{0.06}{12} = 0.005 \tag{7.46}$$

Antall måneder vi må spare:

$$\underline{n} = \frac{\ln\left(\frac{rS_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} + 1\right)}{\ln(1+r)} \tag{7.47}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{0.005 \cdot 100\,000}{1898.23(1+0.005)} + 1\right)}{\ln(1+0.005)} = 46.7 \approx \underline{47} \tag{7.48}$$

Det tar altså $\underline{\underline{n = 47 \text{ måneder}}}$, dvs. kun èn måned kortere tid dersom renten økes til 6 % i året.

■

Oppgave 3: (priselastisitet og logistikk)

a) Se vedlegg A.

b) At $E_p(x) > 0$ betyr at en prisøkning vil gi en økning av etterspørsel. [3]

c) Priselastisiteten $E_p(x)$:

$$\underline{\underline{E_p(x)}} = \frac{d\,x(p)}{dp} \cdot \frac{p}{x(p)} \tag{7.49}$$

$$= \frac{d}{dp}\Big(c - p^2 \Big) \cdot \frac{p}{c - p^2} \tag{7.50}$$

$$= \Big(-2p \Big) \cdot \frac{p}{c - p^2} \tag{7.51}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{2p^2}{300 - p^2}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{7.52}$$

d) Når prisen er $p = 5$ så er tilhørende priselastisitet:

$$\underline{\underline{E_p(x)}} = -\frac{2p^2}{300 - p^2} \tag{7.53}$$

$$= -\frac{2 \cdot 5^2}{300 - 5^2} = -\frac{2}{11} = \underline{\underline{-0.18}} \tag{7.54}$$

[3]Det er svært sjelden at et marked har denne typen dynamikk. For noen luksusvarer kan det mulignes være slik. (Men dette trenger man ikke nevne på eksamen).

e) Tolking:

Dersom prisen p på containertransport øker med 1 % så vil etterspørselen minke med 0.18 %.

(Altså "reduksjonsfaktoren" er 0.18.)

f) Siden

$$E_p(x) \;=\; \frac{\text{\%-vis endring i etterspørsel}}{\text{\%-vis endring i pris}} \tag{7.55}$$

så ser vi at:

$$\begin{aligned} \text{\%-vis endring i etterspørsel} \;&=\; \underbrace{E_p(t)}_{=\,-0.18} \cdot \underbrace{\text{\%-vis endring i inntekt}}_{=\,5\ \%} &(7.56)\\ &=\; -\,0.18 \cdot 5\ \% &(7.57)\\ &=\; -\,0.9\ \% &(7.58)\end{aligned}$$

g) Priselastisiteten er nøytralelastisk når:

$$E_p(x) = -1 \tag{7.59}$$

Priselastisiteten $E_p(x)$ er gitt ved lign.(7.52).
Dermed kan vi løse med hensyn på p alene:

$$\begin{aligned} -\frac{2p^2}{300-p^2} \;&=\; -1 &(7.60)\\ \frac{2p^2}{300-p^2} \;&=\; 1 \qquad \Big|\ \cdot (300-p^2) &(7.61)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2p^2 &= 300 - p^2 && (7.62) \\
3p^2 &= 300 && (7.63) \\
p^2 &= 100 && (7.64)
\end{aligned}
$$

som gir

$$\underline{\underline{p = 10}} \qquad (7.65)$$

siden prisen ikke kan være negativ.

Priselastisiteten er nøytralelastisk, dvs. $E_p(x) = -1$, dersom prisen er $\underline{\underline{10\,000 \text{ NOK}}}$ per container for transport mellom Norge og USA.

$\blacksquare$

Oppgave 4: (logistikk og lagerkostnader)

a) Dette er et minimeringsproblem under en bibetingelse. Derfor er dette en situasjon som er godt egnet for å bruke Lagrange multiplikator.

Av åpenbare grunner er $x_1 \geq 0$ og $x_2 \geq 0$. Dessuten er bibetingelsen:

$$g(x_1, x_2) \;=\; x_1 + x_2 \;=\; 100 \tag{7.66}$$

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$\boxed{F(x_1, y_1) \;=\; C(x_1, x_2) \;-\; \lambda\, g(x_1, x_2) \qquad (7.67)}$$

hvor $C(x_1, x_2) = x_1^2 + 400x_1 \;+\; x_2^2 + 300x_2$. De stasjonære punktene til $F(x_1, x_2)$ er:

$$\frac{\partial\, F(x_1, x_2)}{\partial x_1} \;=\; 0 \qquad , \qquad \frac{\partial\, F(x_1, x_2)}{\partial x_2} \;=\; 0 \tag{7.68}$$

$$\frac{\partial\, C(x, x_2)}{\partial x_1} - \lambda\, \frac{\partial\, g(x_1, x_2)}{\partial x_1} \;=\; 0 \qquad , \qquad \frac{\partial\, C(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda\, \frac{\partial\, g(x_1, x_2)}{\partial x_2} \;=\; 0 \tag{7.69}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2 + 400x_1 \;+\; x_2^2 + 300x_2\right) \;-\; \lambda\, \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 + x_2\right) \;=\; 0 \tag{7.70}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1^2 + 400x_1 \;+\; x_2^2 + 300x_2\right) \;-\; \lambda\, \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1 + x_2\right) \;=\; 0 \tag{7.71}$$

$$2x_1 + 400 \;-\; \lambda \;=\; 0 \tag{7.72}$$

$$2x_2 + 300 \;-\; \lambda \;=\; 0 \tag{7.73}$$

$$2x_1 + 400 \;=\; \lambda \tag{7.74}$$

$$2x_2 + 300 \;=\; \lambda \tag{7.75}$$

De to ligningene i lign.(7.74) og (7.75) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x, y og λ. Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt ("entydig") løsning. Vi kan nå bruke "innsettingsmetoden" [4] og eliminere λ via lign.(7.74) og (7.75):

$$\lambda = \lambda \tag{7.76}$$

$$2x_1 + 400 = 2x_2 + 300 \tag{7.77}$$

$$2x_1 = 2x_2 - 100 \tag{7.78}$$

$$x_1 = x_2 - 50 \tag{7.79}$$

Deretter setter lign.(7.79) inn i bibetingelsen:

$$x_1 + x_2 = 100 \tag{7.80}$$

$$x_2 - 50 + x_2 = 100 \tag{7.81}$$

$$2x_2 = 150 \tag{7.82}$$

$$\underline{x_2 = 75} \tag{7.83}$$

som gir, f.eks. via lign.(7.79), $\underline{x_1} = x_2 - 50 = 75 - 50 = \underline{25}$.

Minimal lagerkostand for $C(x_1, x_2)$ inntreffer altså for $(x_1, x_2) = (25, 75)$.
For å minimere lagerutgiften C_{min} bør Hustadmarmor:

$$\underline{\underline{x_1 = 25}} \quad \textbf{tusen} \text{ tonn av type 1 slurry i tanken} \tag{7.84}$$

$$\underline{\underline{x_2 = 75}} \quad \textbf{tusen} \text{ tonn av type 2 slurry i tanken} \tag{7.85}$$

[4] Med "innsettingsmetoden" mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

b) I oppgave **4a** fant vi at $x_1 = 25$ og $x_2 = 75$ vil minimere kostnaden $C(x_1, x_2)$. Derfor:

$$\underline{C_{\min}} = C(25, 75) \tag{7.86}$$

$$= \left(25^2 + 400 \cdot 25 \; + \; 75^2 + 300 \cdot 75\right) \text{NOK} \; = \; \underline{38\,750 \;\; \text{NOK}} \tag{7.87}$$

Den minimale lagerkostnaden per uke for Hustadmarmor er $\underline{\underline{38\,750 \;\; \text{NOK}}}$.

■

Kapittel 8

LØSNING: Eksamen 10. juni 2016

"MAT100 Matematikk"

Oppgave 1: (økonomi)

a) Deriverer enhetskostnaden $TEK(x)$: $\left(\text{husk:} \quad \frac{1}{x} = x^{-1} \right)$

$$\underline{\frac{d\,TEK(x)}{dx}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{K(x)}{x}\right) \tag{8.1}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(K(x)\,x^{-1}\right) \tag{8.2}$$

$$= \frac{d\,K(x)}{dx}x^{-1} + K(x)\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) \tag{8.3}$$

$$= \frac{d\,K(x)}{dx}x^{-1} - K(x)\frac{d}{dx}x^{-2} \tag{8.4}$$

$$= \underline{\frac{1}{x}\left(\frac{d\,K(x)}{dx} - \overbrace{\frac{K(x)}{x}}^{=\,TEK(x)}\right)} \tag{8.5}$$

Med $x > 0$ ser vi da at betingelsen [1]

$$\frac{dTEK(x)}{dx} \; = \; 0 \tag{8.7}$$

er ekvivalent med (det samme som)

$$\underline{\underline{\frac{dTK(x)}{dx} \; = \; TEK(x)}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{8.8}$$

b) Med inntektsfunksjonen:

$$\underline{\underline{I(x)}} \; = \; x \cdot p(x) \; = \; x(18 - 0.006x) \quad = \quad \underline{\underline{18x - 0.006x^2}} \tag{8.9}$$

så er fortjenesten $F(x) = I(x) - K(x)$ er gitt ved:

$$\underline{\underline{F(x)}} \; = \; I(x) - K(x) \tag{8.10}$$

$$= \; 18x - 0.006x^2 - \big(0.004x^2 + 4x + 4500\big) \tag{8.11}$$

$$= \; \underline{\underline{-0.01x^2 + 14x - 4500}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{8.12}$$

[1] Husk at:

$$\text{minimum enhetskostnad } TEK_{min} \quad \Rightarrow \quad \text{stigningstallet} = 0 \quad \text{dvs.} \quad \frac{dTEK}{dx} \; = \; 0 \tag{8.6}$$

c) For å finne de verdiene av x slik at $F(x) > 0$ så må vi første faktorisere $F(x)$. Deretter setter vi opp et fortegnsskjema. Ut fra fortegnsskjemaet finner vi det oppgaven spør om.

For å faktorisere en andregradsligningen $F(x)$, dvs. lign.(8.12), så må vi første finne nullpunkene til $F(x)$. Bruker ABC-formelen: ($a = -0.01$, $b = 14$, $c = -4500$)

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{8.13}$$

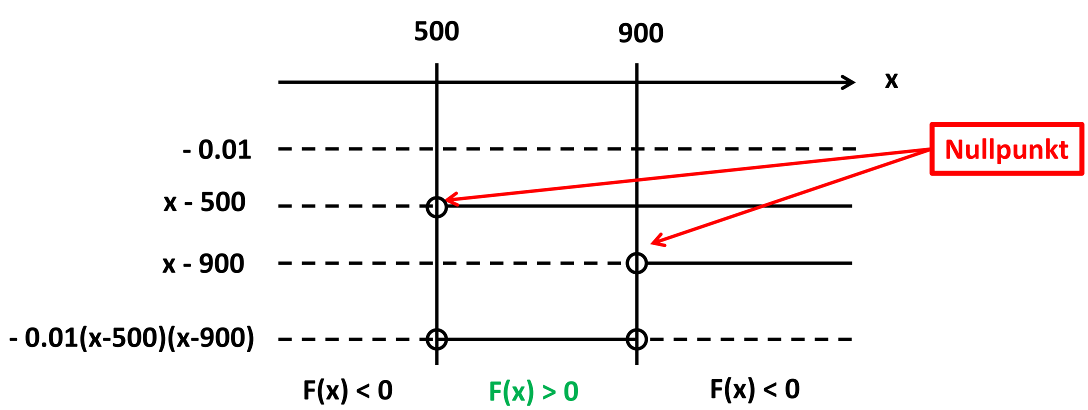
$$x_1 = \frac{-14 + \sqrt{14^2 - 4(-0.01)(-4500)}}{2(-0.01)} \quad , \quad x_2 = \frac{-14 - \sqrt{14^2 - 4(-0.01)(-4500)}}{2(-0.01)}$$

$$\underline{x_1 = 500} \quad , \quad \underline{x_2 = 900} \tag{8.14}$$

Når vi nå har nullpunktene så kan vi faktorisere $F(x)$:

$$\underline{F(x)} \;=\; a(x - x_1)(x - x_2) \;=\; \underline{-0.01(x - 500)(x - 900)} \tag{8.15}$$

Fortegnsskjema: [2]



Figur 8.1: Fortegnsskjema for lign.(8.15).

Ut fra fortegnsskjema ser vi at Glamox går med overskudd, dvs. $F(x) > 0$, når:

$$\underline{\underline{500 \;<\; x \;<\; 900}} \tag{8.16}$$

[2]Også kalt drøftingsskjema.

d) Enhetskostnaden $TEK(x)$ er:

$$\underline{TEK(x)} = \frac{K(x)}{x} \tag{8.17}$$

$$= \frac{0.004x^2 + 4x + 4500}{x} = \underline{0.004x + 4 + \frac{4500}{x}} \tag{8.18}$$

i) Deriverer: $\left(\text{husk:} \quad \frac{1}{x} = x^{-1} \right)$

$$\underline{TEK'(x)} = \frac{d}{dx}\Big(0.004x + 4 + 4500x^{-1}\Big) = \underline{0.004 - \frac{4500}{x^2}} \tag{8.19}$$

Minste enhetskostnad finner man når den deriverte er null:

$$TEK'(x) = 0 \tag{8.20}$$

$$0.004 - \frac{4500}{x^2} = 0 \tag{8.21}$$

som gir:

$$\underline{x} = \sqrt{\frac{4500}{0.04}} \approx \underline{1061} \tag{8.22}$$

Minste enhetskostnad inntreffer når det produseres og selges $\underline{\underline{\text{1061 lamper}}}$.

ii) Siden

$$\underline{TEK''(x)} \;=\; \frac{d^2}{dx^2}\left(0.004x + 4 + \frac{4500}{x}\right) \;=\; \frac{2 \cdot 4500}{x^3} \;\underline{\geq\; 0} \tag{8.23}$$

for $x > 0$ så er $TEK(x)$ konveks, og $x = 1061$ er et $\underline{\underline{\text{globalt } \textit{minimum}}}$,
jfr. 2. derivasjonstesten.

iii) Tilhørende enhetskostnad:

$$\underline{TEK(1061)} \;=\; 0.004 \cdot 1061 + 4 + \frac{4500}{1061} \;=\; \underline{12.49} \tag{8.24}$$

Minste enhetskostnad er $\underline{\underline{1249 \text{ NOK}}}$.

(Siden alle priser og kostnader er i antall 100 NOK).

e) Grensekostnad:

$$\underline{\underline{\frac{d\,K(x)}{dx}}} = \frac{d}{dx}\Big(0.004x^2 + 4x + 4500\Big) = \underline{\underline{0.008x + 4}} \tag{8.25}$$

f) Skjæringspunkt:

$$\boxed{\frac{d\,K(x)}{dx} = TEK(x) \quad (8.26)}$$

$$0.008x + 4 = \frac{0.004x^2 + 4x + 4500}{x} \tag{8.27}$$

$$0.008x + \cancel{4} = 0.004x + \cancel{4} + \frac{4500}{x} \tag{8.28}$$

$$0.004x = \frac{4500}{x} \tag{8.29}$$

Multipliserer med x på begge sider for å løser med hensyn på x alene:

$$0.004x = \frac{4500}{x} \quad \Big| \cdot x \tag{8.30}$$

$$0.004x^2 = 4500 \tag{8.31}$$

$$x = \sqrt{\frac{4500}{0.004}} \tag{8.32}$$

$$\underline{x = 1061} \tag{8.33}$$

siden vi må ha $x > 0$.

Tilhørende y-verdi: [3]

$$\underline{y} = \frac{d\,K(1061)}{dx} \tag{8.34}$$

$$= 0.008 \cdot 1061 + 4 = \underline{12.49} \tag{8.35}$$

Skjæringspunktet mellom $y = \frac{d\,K(x)}{dx}$ og $TEK(x)$ er $\underline{\underline{(x, y) = (\,1061\,,\,12.49\,)}}$

g) Sammenligner svaret fra oppgave **1d** med svaret fra oppgave **1f**:

- Ja, vi får $\underline{\underline{\text{samme svar}}}$ i oppgave **1d** og **1f**.
- Med det blotte øye ser vi at skjæringspunktet mellom kurvene er det samme som minimumpunktet til $TEK(x)$, akkurat som lign. (8.5) sier.

■

[3] Siden $x = 1016$ er skjæringspunktet mellom $\frac{d\,K(x)}{dx}$ og $TEK(x)$ så er $\frac{d\,K(1061)}{dx} = TEK(1061)$. Derfor kan vi velge om vi setter $x = 1061$ inn i $K'(x)$ eller $TEK(x)$ når vi skal finne tilhørende y-koordinat.

Oppgave 2: (petroleumslogistikk)

a) Verdens totale oljeforbruk i år 2027:

$$\underline{\underline{a_7}} = f\,1.04^7 \tag{8.36}$$

$$= 30 \cdot 10^9 \cdot 1.04^7 \ \text{ fat olje } = \underline{\underline{39.5 \cdot 10^9 \ \text{ fat olje}}} \tag{8.37}$$

b) Rekken $a_i = f 1.04^i$ er på formen $a_{i+1} = k a_i$, hvor $k =$ en konstant. [4]
Derfor er det en geometrisk rekke.

c) Summen av en geometrisk rekke er: [5]

$$S_n^{\text{forbruk}} = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \tag{8.38}$$

For vår rekke er kvotienten $k = 1.04$ og $a_1 = f\,1.04$. Dette setter vi inn i lign.(8.38):

$$\underline{\underline{S_n}} \overset{\text{lign.(8.38)}}{=} a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \tag{8.39}$$

$$= f\,1.04 \frac{1.04^n - 1}{1.04 - 1} = \frac{1.04}{1.04 - 1} f\,(1.04^n - 1) \tag{8.40}$$

$$= \underline{\underline{26 f \left(1.04^n - 1\right)}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{8.41}$$

[4] $k = 1.04$ i vårt tilfelle.
[5] Se formelsamlingen dersom du ikke husker formelen i hodet.

d) Formelen i oppgave **2c** viser verdens totale oljeforbruk n år etter år 2020. Derfor kan vi bruke nettopp denne formlen med $n = 10$ for å finne verdens totale oljeforbruk i perioden fra og med 2021 og til med 2030: [6]

$$\underline{\underline{S_n}} = 26f\left(1.04^n - 1\right) \tag{8.42}$$

$$= 26 \cdot 30 \cdot 10^9 \left(1.04^{10} - 1\right) \text{ fat olje } = \underline{\underline{374.59 \cdot 10^9 \text{ fat olje}}} \tag{8.43}$$

e) Siden vi antar at man ikke finner mer olje så må man tære på reservene. Altså:

$$R = S_n \tag{8.44}$$

Vi bruker svaret fra oppgave **2c**, dvs. lign.(8.41), og løser med hensyn på "n" alene:

$$R = 26f\left(1.04^n - 1\right) \qquad \Big| \cdot \frac{1}{26f} \tag{8.45}$$

$$\frac{R}{26f} = 1.04^n - 1 \tag{8.46}$$

$$\frac{R}{26f} + 1 = 1.04^n \tag{8.47}$$

For å "jekke ned" eksponenten "n" så tar vi "ln" på begge sider av ligningen:

$$\ln\left(\frac{R}{26f} + 1\right) = \ln 1.04^n \tag{8.48}$$

$$\ln\left(\frac{R}{26f} + 1\right) = n \ln 1.04 \tag{8.49}$$

hvor vi har brukt regneregelen $\ln a^n = n \ln a$.
Dermed: ved å dele på "$\ln 1.04$" på begge sider at lign.(8.49) så får vi:

$$\underline{\underline{n = \frac{\ln\left(\frac{R}{26f} + 1\right)}{\ln 1.04}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{8.50}$$

[6] Man kan også skrive svaret på formen: $S_n = 3.75 \cdot 10^{11}$ fat olje.

f) For å finne ut hvor lang tid det tar det før man bruker opp oljereservene R så bruker vi bare resultatet fra oppgave **2e**, dvs. lign.(8.50):

$$\underline{n} \overset{\text{lign.(8.50)}}{=} \frac{\ln\left(\frac{R}{26f}+1\right)}{\ln 1.04} \tag{8.51}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{1.5\cdot 10^{12}}{26\cdot 30\cdot 10^{9}}+1\right)}{\ln 1.04} \approx \underline{27.3} \tag{8.52}$$

Oljereservene vil bli brukt opp i år $\underline{\underline{2048}}$.

■

Oppgave 3: (økonomi og finansmatematikk)

a) Formelen for nåverdien K_0 er oppgitt i oppgaven:

$$K_0 \;=\; K\,\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{r} \tag{8.53}$$

Løser med hensyn på K alene:

$$K_0 \;=\; K\,\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{r} \qquad \Big|\cdot r \tag{8.54}$$

$$K_0 r \;=\; K\left(1-\frac{1}{(1+r)^n}\right) \qquad \Big|\cdot \frac{1}{1-\frac{1}{(1+r)^n}} \tag{8.55}$$

som gir

$$\underline{\underline{K \;=\; \frac{K_0 r}{1-\frac{1}{(1+r)^n}}}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{8.56}$$

b) Formelen for nåverdien K_0 er oppgitt i oppgaven:

$$K_0 \;=\; K\,\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{r} \tag{8.57}$$

Løser med hensyn på n alene:

$$\begin{aligned}
K_0 &= K\,\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{r} && \Big|\cdot \frac{r}{K} && (8.58)\\
\frac{K_0 r}{K} &= 1-\frac{1}{(1+r)^n} && && (8.59)\\
\frac{1}{(1+r)^n} &= 1-\frac{K_0 r}{K} && && (8.60)
\end{aligned}$$

Multipliserer med $(1+r)^n$ på begge sider:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+r)^n} &= 1-\frac{K_0 r}{K} && \Big|\cdot (1+r)^n && (8.61)\\
1 &= (1+r)^n\left(1-\frac{K_0 r}{K}\right) && \Big|\cdot \frac{1}{1-\frac{K_0 r}{K}} && (8.62)\\
\frac{1}{1-\frac{K_0 r}{K}} &= (1+r)^n && && (8.63)
\end{aligned}$$

Ta logaritmen ln på begge sider av siste ligning. Da får man: (“*jekke ned*” regel)

$$\ln\left(\frac{1}{1-\frac{K_0 r}{K}}\right) = \ln(1+r)^{\color{red}n} \tag{8.64}$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-\frac{K_0 r}{K}}\right) = {\color{red}n}\ln(1+r) \tag{8.65}$$

Deler på $\ln(1+r)$ i siste ligning og får:

$$\underline{\underline{n = \frac{\ln\left(\frac{1}{1-\frac{K_0 r}{K}}\right)}{\ln(1+r)}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{8.66}$$

c) Denne oppgaven dreier seg om oppsparingsannuitet.

Siden man skal finne oppspart beløp like etter at siste beløp er satt inn i banken så kan vi ikke bruke formelen som oppgitt i oppgaven: [7]

$$\underline{S_n^{\text{ann, u}}} = K \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \tag{8.67}$$

$$= 15\,000 \cdot \frac{(1+0.05)^{30} - 1}{0.05} \text{ NOK} \approx \underline{996\,583 \text{ NOK}} \tag{8.68}$$

Ved oppsparing i 30 år og en rente på $r = 5\ \%$ blir oppspart beløp rett etter siste innbetaling $\underline{\underline{996\,583 \text{ NOK}}}$.

d) Siden beløpet vi fant i oppgave **3c** skal utbetales i faste beløp så er altså innskuddet/nåverdien:

$$K_0 = 996\,583 \text{ NOK} \tag{8.69}$$

Oppgaven spør etter hvor mye Ola kan ta ut i året dersom han bestemmer seg for å bruke opp pensjonen $K_0 = 996\,583$ NOK over en periode på $n = 10$ år.
Oppgaven spør altså etter terminbeløpet K.
Formelen for terminbeløpet K fant vi i **3a**: [8]

$$\underline{K} = \frac{K_0 r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \tag{8.70}$$

$$= \frac{996\,583 \cdot 0.05}{1 - \frac{1}{(1+0.05)^{10}}} \text{ NOK} \approx \underline{129\,062 \text{ NOK}} \tag{8.71}$$

Ola kan ta ut $\underline{\underline{K = 129\,062 \text{ NOK}}}$ hvert år i 10 år.

[7] Vi finner også formelen for $S_n^{\text{ann, u}}$ i formelsamlingen.
[8] Denne formelen for K finner vi også i formelsamlingen.

e) Vi skal finne antall år som beløpet

$$S_n^{\text{ann, u}} \;=\; 996\,583 \;\; \text{NOK} \tag{8.72}$$

varer dersom Ola ønsker å ta ut $K = 60\,000$ NOK hvert år.

Det viktige steget i denne oppgaven er å innse at dette antall år n er gitt av formelen fra oppgave **3b**, dvs. lign.(8.66):

$$n \;=\; \frac{\ln\left(\frac{1}{1-\frac{K_0 r}{K}}\right)}{\ln(1+r)} \tag{8.73}$$

Dermed blir oppgaven "bare" å sette inn tall:

$$\underline{n} \;=\; \frac{\ln\left(\frac{1}{1-\frac{996\,583\cdot 0.05}{60\,000}}\right)}{\ln(1+0.05)} \;=\; \underline{36.4} \tag{8.74}$$

Dette betyr at man kan oppnå $\underline{\underline{\text{36 fulle utbetalinger}}}$ på 60 000 NOK.

f) Dersom Ola skal få en årlig rente på 55 000 NOK som pensjonist så er det oppsparte beløpet $S_n^{\text{ann, u}}$ bestemt av ligningen $55\,000 = S_n^{\text{ann, u}} \cdot r$, dvs.:

$$\underline{S_n^{\text{ann, u}}} \;=\; \frac{55\,000}{0.05} \;\text{NOK} \;=\; \underline{1\,100\,100 \;\text{NOK}} \tag{8.75}$$

Oppgaven er nå å finne den kapitalen K som Ola må sette av årlig fra og med år 2016 til og med år 2045, dvs. $n = 30$, slik at oppspart beløp blir $S_n^{\text{ann, u}} = 1\,100\,100$ NOK.

Løser ligningen

$$S_n^{\text{ann, u}} = K \, \frac{(1+r)^n - 1}{r} \tag{8.76}$$

med hensyn på K alene:

$$\underline{K} = \frac{r S_n^{\text{ann, u}}}{(1+r)^n - 1} \tag{8.77}$$

$$= \frac{0.05 \cdot 1\,100\,100}{(1+0.05)^{30} - 1} \ \text{NOK} = \underline{16\,557 \ \ \text{NOK}} \tag{8.78}$$

Ola må sette av $\underline{\underline{K = 16\,557 \text{ NOK}}}$ årlig mellom 2016 og 2045 dersom renten av pensjonen skal gi ham 55 000 NOK i året.

■

Oppgave 4: (økonomi)

a) Nytten for $x = 60$ og $y = 25$:

$$\underline{\underline{U(60,25)}} = 2\ln(60) \; + \; 15\ln(25) \; = \; \underline{\underline{56.47}} \tag{8.79}$$

b) Med $x = 60$ og $y = 25$:

$$\underline{p_x x \; + \; p_y y} \; = \; \big(15 \cdot 60 \; + \; 250 \cdot 25\big) \text{ NOK/måned} \; = \; \underline{7\,150 \text{ NOK/måned}} \tag{8.80}$$

som er mindre enn den samlede konsumutgiften per måned, $m = 8500$ NOK/måned. Derfor er $x = 60$ og $y = 25$ <u>innenfor budsjettet</u>.

c) Dette er et maksimeringssproblem under en bibetingelse. Derfor er dette en situasjon som er godt egnet for å bruke Lagrange multiplikatorer.

Av åpenbare grunner er $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Dessuten er bibetingelsen:

$$g(x,y) \; = \; 15x + 250y \; = \; 8500 \tag{8.81}$$

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$\boxed{F(x,y) \; = \; U(x,y) \; - \; \lambda\, g(x,y) \qquad (8.82)}$$

dvs.

$$F(x,y) \; = \; 2\ln(x) \; + \; 15\ln(y) \; - \; \lambda\big(15x + 250y\big) \tag{8.83}$$

De stasjonære punktene til $F(x, y)$ er:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0 \tag{8.84}$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0 \tag{8.85}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(2\ln(x) + 15\ln(y)\Big) - \lambda \frac{\partial}{\partial x}\Big(15x + 250y\Big) = 0 \tag{8.86}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(2\ln(x) + 15\ln(y)\Big) - \lambda \frac{\partial}{\partial y}\Big(15x + 250y\Big) = 0 \tag{8.87}$$

$$\frac{2}{x} - 15\lambda = 0 \tag{8.88}$$

$$\frac{15}{y} - 250\lambda = 0 \tag{8.89}$$

$$\frac{2}{15x} - \lambda = 0 \tag{8.90}$$

$$\frac{15}{250y} - \lambda = 0 \tag{8.91}$$

De to ligningene i lign.(8.89) og (8.91) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x, y og λ. Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt ("entydig") løsning. Vi kan nå bruke "innsettingsmetoden" [9]. Siden λ ikke er en interessant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ i lign.(8.89) og (8.91):

$$\lambda = \lambda \tag{8.92}$$

$$\frac{2}{15x} = \frac{15}{250y} \tag{8.93}$$

[9] Med "innsettingsmetoden" mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

og størrelsen λ er eliminert. Lign.(8.93) kan vi snu på hodet: [10]

$$\frac{15x}{2} = \frac{250y}{15} \tag{8.94}$$

$$\underline{x \;=\; \frac{20}{9}y} \tag{8.95}$$

Innsatt i budsjettligningen i lign.(8.81):

$$15x + 250y \;=\; 8500 \tag{8.96}$$

$$15\left(\frac{20}{9}y\right) + 250y \;=\; 8500 \tag{8.97}$$

$$283.33y \;=\; 8500 \tag{8.98}$$

$$\underline{y = 30} \tag{8.99}$$

Til slutt setter vi dette svare inn i lign.(8.95)

$$\underline{x} \;=\; \frac{20}{9}30 = \underline{66.67} \tag{8.100}$$

For å maksimere nytten $U(x,y)$ må studenten kjøpe

$$\underline{\underline{x \;= 66.67}} \qquad \text{liter bensin per måned} \tag{8.101}$$

og leie en hybel som er

$$\underline{\underline{y \;= 30}} \qquad \text{antall kvadratmeter stor hybel} \tag{8.102}$$

■

[10]Ligningen $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ kan man snu på hodet $\frac{8}{3} = \frac{24}{9}$.

d) Med $x = 66.67$ og $y = 30$:

$$\underline{p_x x \; + \; p_y y} \;=\; \big(15 \cdot 66.67 \;+\; 250 \cdot 30\big)\ \text{NOK/måned} \;=\; \underline{8500\ \text{NOK/måned}} \tag{8.103}$$

altså hele budsjettet brukes.

■